Les catégories de modèle

Une chanson-présentation

Béranger

Thé virtuel du DMA
15 avril 2020

Depuis des décénnies,
Topologues, algébristes
Font de l'homotopie
Un peu à l'improviste.

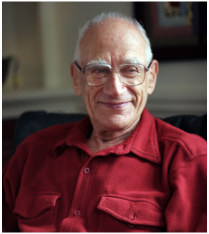
$$\pi_1(X) = \{\gamma : \mathbb{S}^1 \to X\}/\sim$$

Qu'ce soit dans les espaces
Ou les complexes de chaînes
Ils comprennent pas c'qui s'passe
Quand débarque un π_n.

Définition : Soit f, g deux morphismes $A \to B$ entre complexes de chaînes. Une *homotopie* entre f et g est la donnée d'applications $h_n : A_n \to B_{n+1}$ telles que :

$$f - g = hd_A + d_B h.$$

Enfin, ça c'était hier
Parce que Quillen et Kan
Ont percé ce mystère,
Éclairé ces arcanes.



Suffit d'avoir trois types de flèches
Les équivalences faibles et puis
Les fibrations qui sont de mèche
Avec les cofibrations leurs amies

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie complète, cocomplète (d'élément initial $\emptyset$ et final $\star$). On fixe $\mathcal{W}, \mathcal{F}, \mathcal{C}of$ trois sous-ensembles de $\mathrm{Ar}(\mathcal{C})$ stables par retract. On notera :

- $\overset{\sim}{\to}$ une flèche de $\mathcal{W}$, nommée *équivalence faible* ;
- $\twoheadrightarrow$ une flèche de $\mathcal{F}$, nommée *fibration* ;
- $\rightarrowtail$ une flèche de $\mathcal{C}of$, nommée *cofibration*.

Couplet 5 : Définition 2/2

Deux, trois axiomes pour s'assurer
Qu'on a des relèvements
Et qu'on va pouvoir découper
Tout morphisme gentiment.

On demande à ce que h existe dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, hook, "i"'] & B \arrow[d, two heads, "p"] \\ C \arrow[r] \arrow[ur, dotted, "\exists ? h"] & D \end{tikzcd}$$

chaque fois que i ou p est dans $\mathcal{W}$.

On demande à ce que pour toute flèche $f : A \to B$, il existe un C naturel tel que :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i"'] \arrow[rr, bend left, "f"] & C \arrow[r, two heads, "p"'] & B \end{tikzcd}$$

avec $i \in \mathcal{W}$, et de même avec $p \in \mathcal{W}$.

Bien sûr, cela généralise
Nos exemples initiaux,
Et ça, qu'on se le dise,
C'est quand même vachement beau !

Théorèmes vagues (et assez difficiles) : Il existe des structures de catégories de modèle sur les catégories des espaces topologiques, des complexes de chaînes, des ensembles simpliciaux, qui ont les équivalences faibles que l'on souhaite (isomorphisme de groupes d'homotopie, ou en homologie, etc.), et soit les fibrations que l'on souhaite, soit les cofibrations que l'on souhaite. (À équivalences faibles fixées, les fibrations déterminent les cofibrations et vice-versa, on n'est donc pas libre)

Dans ce cadre sympathique
On peut parler sans peur
D'équivalences homotopiques
Et c'est pas encore le meilleur :

Soit deux morphismes $f, g : A \to B$. Soit un élément $\mathrm{Cyl}(A)$ tel que :

$$\begin{tikzcd} A \sqcup A \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id} \sqcup \mathrm{id}"] & \mathrm{Cyl}(A) \arrow[r, two heads, "\sim"] & A \end{tikzcd}$$

Alors f et g sont *homotopes à gauche* s'il existe une application $\eta : \mathrm{Cyl}(A) \to B$ telle que :

$$\begin{tikzcd} A \sqcup A \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend left, "f \sqcup g"] & \mathrm{Cyl}(A) \arrow[r, "\eta"] & B \end{tikzcd}$$

on définit dualement l'*homotopie à droite* et l'*homotopie tout court* (à gauche *et* à droite).

Couplet 8 : Propriétés 2/2

Parce que pour tout objet
On en a un autre bien gentil
Qui a les mêmes propriétés
Pour c'qu'est d'l'homotopie.

Un objet X est *cofibrant* si $\emptyset \rightarrowtail X$, et *fibrant* si $X \twoheadrightarrow \star$. Ici, *gentil* signifiera fibrant et cofibrant.

Propriété (facile) : Tout objet est faiblement équivalent à un objet gentil.

Propriété (un peu plus dure) : Deux applications f, g entre objets gentils sont homotopes à gauche si et seulement si elles le sont à droite (on peut donc simplement parler d'homotopie).

Couplet 8 : Un théorème 1/3

Voici un petit théorème
Que je trouve magnifique.
Vous comprendrez pourquoi je l'aime
Mais faut que j'vous l'explique.

Théorème fondamental : Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de modèle. [...]

Si on inverse formellement
Toutes nos équivalences,
On veut décrire proprement
La catégorie en présence.

Théorème fondamental : Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de modèle. On note $\mathrm{ho}(C)$ la catégorie $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ dont les morphismes sont des zigzags où l'on peut « remonter le long » des équivalences faibles. [...]

En fait c'est la catégorie
Des objets gentils
Avec les morphismes de jadis
Mais modulo l'homotopie.

Théorème fondamental : Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de modèle. On note $\mathrm{ho}(C)$ la catégorie $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ dont les morphismes sont des zigzags où l'on peut « remonter le long » des équivalences faibles. Alors $\mathrm{ho}(C)$ est isomorphe à la catégorie $\mathcal{C}_{cf}$ des objets fibrants-cofibrants de $\mathcal{C}$ avec les morphismes à homotopie près.