Ultraproduits de corps gauches et problème de Galois inverse

7 février 2025

Ultraproduits de corps gauches. Dans tout le document, on fixe un cardinal κ et un ultrafiltre non-principal $\mathcal{U}$ sur κ. On dira qu'une propriété vaut pour « presque tout i » lorsque l'ensemble des $i \in \kappa$ pour lesquelles elle est vraie est dans $\mathcal{U}$ — en particulier, toute propriété qui admet un nombre fini d'exceptions i est vraie pour presque tout i. Puisque $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre, toute propriété est soit vraie pour presque tout i, soit fausse pour presque tout i.

Étant donnée une famille $(A_i)_{i\in\kappa}$ de $\mathcal{L}$-structures (sur le langage des anneaux $\mathcal{L} = \{0, 1, +, \times\}$), on définit leur ultraproduit $\prod^{\mathcal{U}} A_i$ comme l'ensemble des classes d'équivalences de listes $x = (x_i)_{i\in\kappa}$ avec $x_i \in A_i$, pour la relation d'équivalence « $x_i = y_i$ pour presque tout i ». Une ultrapuissance est un ultraproduit dont tous les facteurs sont égaux. On rappelle le théorème de Łoś : les formules du premier ordre (dans le langage $\mathcal{L}$) satisfaites par $\prod^{\mathcal{U}} A_i$ sont exactement celles satisfaites par A_i pour presque tout i. En particulier, un ultraproduit d'anneaux (resp. d'anneaux commutatifs) est un anneau (resp. un anneau commutatif), un ultraproduit de corps gauches (resp. de corps commutatifs) est un corps gauche (resp. un corps commutatif), etc.

Par exemple, voilà comment on montre que le centre de $\prod^{\mathcal{U}} A_i$ est $\prod^{\mathcal{U}} Z(A_i)$ (la centralité d'un élément x étant bien sûr une propriété du premier ordre, à savoir $\forall y, xy = yx$) : un élément $x \in \prod^{\mathcal{U}} A_i$, représenté par une certaine liste $(x_i)_{i\in\kappa}$, est central si et seulement si x_i est central pour presque tout i ; quitte à rendre nuls les x_i non centraux, on peut alors supposer x_i central pour tout i sans changer l'élément x.

Propriété IGP_G, stabilité par ultraproduit et axiomatisabilité. Fixons un groupe fini G. Le résultat suivant est classique (voir `arXiv:2007.13047`) : le fait pour un corps commutatif d'admettre une extension galoisienne de groupe de Galois isomorphe à G est axiomatisable au premier ordre par une certaine formule. D'après le théorème de Łos, cette propriété est donc stable par ultraproduit.

En fait, l'axiomatisabilité au premier ordre d'une propriété est équivalent à la conjonction des trois choses suivantes : elle est préservée par isomorphisme, elle est préservée par ultraproduit, et elle est préservée par « ultraracines » (si un ultraproduit de corps tous égaux satisfait la propriété, alors le corps de départ la satisfait).

On dit qu'une extension de corps gauches L/K est extérieure si le centralisateur de K dans L est le centre de L, et qu'elle est galoisienne si le sous-corps de L fixé par tous les automorphismes de l'extension L/K est exactement K. Les extensions extérieures galoisiennes sont celles pour lesquelles on a une correspondance de Galois identique à la correspondance pour les corps commutatifs. On dira d'un corps gauche K qu'il satisfait IGP_G s'il satisfait la propriété suivante :

(IGP_G) Il existe une extension L/K, extérieure et galoisienne, telle que $\mathrm{Aut}(L/K)$ soit isomorphe à G.

Question. IGP_G est-elle axiomatisable au premier ordre (dans le langage des anneaux) ?

La stabilité par isomorphisme est évidente.

Montrons la stabilité par ultraproduit. Elle découle en fait du fait suivant : si les K_i (pour $i \in \kappa$) sont des corps gauches et que, pour chaque $i \in \kappa$, L_i/K_i est une extension extérieure galoisienne de groupe de Galois isomorphe à G, alors l'extension $\mathbb{L}/\mathbb{K}$, où $\mathbb{L} = \prod^{\mathcal{U}} L_i$ et $\mathbb{K} = \prod^{\mathcal{U}} K_i$, est extérieure galoisienne de groupe de Galois isomorphe à G. D'abord, le corps $\mathbb{K}$ est le sous-corps de $\mathbb{L}$ formé des classes d'équivalence d'éléments $(x_i) \in \prod L_i$ tels que $x_i \in K_i$ pour presque tout i (on peut remplacer les x_i pour lesquels $x_i \notin K_i$ par un élément arbitraire de K_i, par exemple 0, sans changer l'élément correspondant de $\mathbb{L}$). L'action de G sur chacune des extensions L_i/K_i (donnée par le choix d'un isomorphisme) induit, coordonnée par coordonnée, une action de G sur l'extension $\mathbb{L}/\mathbb{K}$. [1]

— Montrons d'abord que $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ est extérieure. Soit un élément $x \in \mathbb{L} \setminus Z(\mathbb{L})$. Il existe alors un élément $y \in \mathbb{L}$ avec lequel x ne commmute pas. Choisissons des représentants $(x_i)_{i\in\kappa}$ de x et $(y_i)_{i\in\kappa}$ de y. Puisque x et y ne commutent pas, x_i et y_i ne commutent pas pour presque tout i. Puisque L_i/K_i est extérieure, x_i n'est alors pas dans le centralisateur de K_i pour presque tout i. Il existe alors une suite (presque partout définie) d'éléments $z_i \in K_i$, induisant un élément $z \in \mathbb{K}$, tels que x_i ne commute pas avec z_i pour presque tout i. Cela entraîne que x et z ne commutent pas. Par contraposée, on a montré qu'un élément de $\mathbb{L}$ qui commute avec tout élément de $\mathbb{K}$ est dans le centre de $\mathbb{L}$. Autrement dit, $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ est extérieure.

— Montrons à présent que le sous-corps de $\mathbb{L}$ fixé par G est $\mathbb{K}$. Soit un élément $x \in \mathbb{L}$, dont on choisit un représentant $(x_i)_{i\in\kappa}$, et supposons x fixé par l'action de G. Alors, x_i est fixé par l'action de G pour presque tout i, et alors $x_i \in K_i$ pour presque tout i. Cela montre $x \in \mathbb{K}$.

— Finalement, montrons que l'action de G est fidèle. Soit un élément $g \in G$ non trivial, et choisissons pour chaque $i \in \kappa$ un élément $x_i \in L_i$ tel que

1. On s'épargnerait des difficultés en rajoutant les éléments de G comme symboles d'opération dans le langage, et en axiomatisant le fait d'avoir une action de G (en copiant-collant la table de multiplication dans G dans les axiomes), travaillant ainsi dans la théorie des corps munis d'une action fidèle de G.

$g.x_i \neq x_i$ (c'est possible puisque G est le groupe de Galois de L_i/K_i, et donc agit fidèlement). Alors, l'élément x obtenu comme classe d'équivalence de la liste $(x_i)_{i\in\kappa}$ satisfait $g.x \neq x$. Cela montre que G agit fidèlement sur $\mathbb{L}$.

Les deux premiers points entraînent que l'extension $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ est extérieure galoisienne. En particulier, la correspondance de Galois induit une correspondance bijective entre les sous-extensions de $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ et les sous-groupes de son groupe d'automorphismes. Le troisième point entraîne que G s'injecte dans le groupe d'automorphismes de $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ (correspondant alors à un certain sous-groupe $G' \subseteq \mathrm{Aut}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$), et le deuxième point entraîne que le sous-corps associé au sous-groupe G' est $\mathbb{K}$. Par la correspondance de Galois, on a donc $G' = \mathrm{Aut}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$, d'où un isomorphisme $G \simeq \mathrm{Aut}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$.

La stabilité par ultraproduit permet déjà, étant donné un corps gauche K satisfaisant IGP_G, et obtenu comme corps de fractions tordues sur un corps gauche infini k, d'obtenir un corps gauche K' contenant k, satisfaisant IGP_G, mais qui n'est pas un corps de fractions tordues sur k : il suffit de définir K' comme l'ultrapuissance de κ copies de K, où κ est choisi strictement plus grand que la cardinalité de k : il est alors impossible, pour des raisons de cardinalité, que K' soit un corps de fractions tordues sur k. [2]

La stabilité par ultraracine, en revanche, pose un problème sérieux. Supposons que K soit un corps gauche et que $\mathbb{K} := \prod^{\mathcal{U}} K$ satisfasse IGP_G. Soit alors une extension $\mathbb{L}/\mathbb{K}$, extérieure et galoisienne de groupe de Galois isomorphe à G. On cherche à faire de la descente, c'est-à-dire à construire une extension L/K, extérieure et galoisienne de groupe de Galois isomorphe à G, à partir de l'extension de $\mathbb{K}$ (le corps K s'identifie naturellement à un sous-corps de $\mathbb{K}$ via le plongement diagonal). Le cas commutatif nous suggèrerait de prendre l'ensemble des éléments de $\mathbb{L}$ « algébriques » sur K. C'est mal barré : déjà, ça n'a pas vraiment de raison de former un corps ; de plus, même $\mathbb{K}$ peut contenir des éléments algébriques sur K qui ne sont pas dans K (pas possible dans le cas commutatif puisqu'un polynôme a toujours un nombre fini de racines !). [3] Peut-être qu'il existe une voie différente, en choisissant une extension maximale parmi les extensions de K contenues dans $\mathbb{L}$ dont tous les éléments sont algébriques, ou quelque chose comme ça. En tout cas, je n'ai pas trouvé de porte de sortie évidente. Peut-être aussi qu'on peut construire l'extension en question en utilisant la correspondance de Galois.

Version régulière. Introduisons un corps gauche k, et définissons le langage $\mathcal{L}_k$ dont les constantes sont les éléments de k (notamment, 0 et 1), plus

2. En fait, il me paraît raisonnable de penser qu'un corps de fractions tordues (sur un corps gauche quelconque) n'est *jamais* isomorphe à un ultraproduit de corps gauches. Il paraît en effet peu probable qu'un tel corps de fraction tordues soit ω-saturé (cf. la page *Saturated model* sur Wikipedia). Il faudrait cependant trouver un type que ne réalisent pas les corps de fractions tordues, et je n'en ai pas trouvé d'exemple évident.

3. Par exemple, si $\mathbb{H}$ désigne le corps gauche des quaternions de Hamilton, et si $\kappa = 2^{\aleph_0}$, l'élément de $\prod^{\mathcal{U}} \mathbb{H}$ représenté par la liste des conjugués de i (dans un ordre arbitraire) est racine de $X^2 + 1$, sans être dans l'image du plongement diagonal de $\mathbb{H}$ (c'est une « racine non-standard »).

deux opérations d'arité 2 ($+$ et $\times$). On note Ext_k la théorie (du premier ordre) dont les axiomes sont ceux définissant un corps gauche, plus toutes les formules sans quantificateurs satisfaites par k (exprimées avec les symboles de constantes correspondants). Ainsi, les modèles de Ext_k sont exactement les corps gauches munis d'un plongement de k.

Étant donné un corps gauche L contenant k, on dit qu'il est k-régulier si tout élément $x \in L$ algébrique sur k, c'est-à-dire que $k(x)$ est de dimension finie sur k (à droite et à gauche), est dans k. On dit alors d'un corps gauche K k-régulier qu'il satisfait RIGP_G s'il satisfait la propriété suivante :

(RIGP_G) Il existe une extension L/K, extérieure, galoisienne et k-régulière, telle que $\mathrm{Aut}(L/K)$ soit isomorphe à G.

On souhaiterait démontrer la stabilité par ultraproduit de cette classe de corps gauches. La preuve pour IGP_G pourrait être adaptée texto si on pouvait montrer que tout ultraproduit de corps gauches k-réguliers est un corps gauche k-régulier. Tentons. Soit K_i (pour $i \in \kappa$) des corps gauches k-réguliers, soit $\mathbb{K} = \prod^{\mathcal{U}} K_i$, et soit un élément $x \in \mathbb{K}$ qui soit algébrique sur k. Mon impression est la suivante : l'algébricité entraîne que presque toutes les coordonnées x_i sont algébriques sur k, annulées par les mêmes polynômes ; puisque K_i est k-régulière, les coordonnées x_i appartiennent donc à k, sont annulées par les mêmes polynômes. Cela dit que x est un élément de $\prod^{\mathcal{U}} k$ algébrique sur k mais, comme on l'a déjà vu (voir la note de bas de page n° 3), cela n'entraîne pas que x soit dans k ! Par contre, dans le cas où par exemple k est le corps $\mathbb{H}$ des quaternions, et x est une racine de $X^2 + 1$, s'il n'est pas vrai que x est nécessairement dans $\mathbb{H}$, il est vrai que chacune des coordonnées $x_i \in \mathbb{H}$ est conjuguée à i (toutes les racines de $X^2 + 1$ sont conjuguées à i par un élément de $\mathbb{H}$), et donc x est conjuguée à i dans $\prod^{\mathcal{U}} \mathbb{H}$! Peut-être qu'il faudrait donc affaiblir la définition d'« extension régulière » pour inclure ce genre de situations avec des éléments conjugués à un élément du corps de base ; par exemple, si une « extension k-prérégulière » est une extension de k dans laquelle tout élément annulé par un polynôme à coefficients dans $Z(k)$ est conjugué à un élément de k, ou quelque chose comme ça (dans le cas commutatif, cela redonnerait toujours la définition ordinaire d'extension régulière).

Conclusion. Ça ne marche peut-être pas aussi bien qu'on voudrait. En tout cas, il n'est évident ni pour IGP_G ni pour RIGP_G qu'elles soient axiomatisables au premier ordre (alors qu'elles le sont dans le cas commutatif), et je pense que c'est une question intéressante en soi ! La stabilité par ultraproduit de IGP_G est déjà un ersatz prometteur, peut-être ?