Ensembles de MELOTTI

B.S.

18 mai 2018

1 Généralités

Définition 1. *Une partie A de $\mathbb{N}$ est un* ensemble de MELOTTI *si pour tout $n > 1$ et pour tout $a_1, \ldots, a_n \in A$, on a :*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \notin A$$

Remarque 2. *Si A est un ensemble de* MELOTTI*, $0 \notin A$. En effet, si 0 était dans A, on devrait avoir $0+0 \notin A$, ce qui est absurde.*

Remarque 3. *Un sous-ensemble d'un ensemble de* MELOTTI *est de* MELOTTI

Théorème 4. *Un ensemble de* MELOTTI *est nécessairement fini. S'il est non vide, son cardinal est inférieur à son minimum.*

Preuve. Soit un ensemble de MELOTTI A non vide et $n = \min(A) > 0$. On définit donc : $\pi_n : A \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Montrons que π_n est injective. On saura alors que $|A| \leq |\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}| = n = \min(A)$ d'où le résultat.

Supposons $\pi_n(x) = \pi_n(y)$ avec $x, y \in A$. Sans perte de généralité, on peut supposer $x < y$. On écrit alors :

$$y = x + kn$$

avec $k \geq 0$. Si $k > 0$, cela signifie que $x + n + n + n + \ldots + n$ (k répétitions) est dans A, ce qui contredit l'hypothèse. On a donc $k = 0$, c'est-à-dire $y = x$. L'application π_n est donc injective. $\square$

Remarque 5. *Le raisonnement précédent tient bien sûr pour n'importe quel élément de A, et pas seulement pour le minimum. Ainsi, pour tout $a \in A$, $\pi_a : A \to \mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ est une fonction injective, ce qui est possiblement très contraignant.*

2 Classification

On cherche à caractériser les ensembles de MELOTTI parmi les parties finies de $\mathbb{N}$, on va les classer selon leur minimum.

On dénote par la suite par $\mathfrak{M}$ l'ensemble des ensembles de MELOTTI et par $\mathfrak{M}_n$ l'ensemble des ensembles de MELOTTI de minimum n. On notera $\mathfrak{M}_0 = \emptyset$, de sorte que $\mathfrak{M} = \cup_{n \geq 0} \mathfrak{M}_n$ et que $A \in \mathfrak{M}_n \Rightarrow |A| \leq n$.

Une question qu'on se pose est la suivante :

Question 6. *Étant donné un entier $n \in \mathbb{N}$ et une partie $\tilde{B}$ de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \setminus \{0\}$, quelles sont les parties B de $\mathbb{N}$ telles que :*

- *L'application $B \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est injective et a pour image $\tilde{B}$ (i.e. B est un relèvement de la partie $\tilde{B}$).*
- *$\{n\} \cup B \in \mathfrak{M}_n$*

On se demande aussi :

Question 7. *Étant donné un entier $n \in \mathbb{N}$ et un ensemble $A \in \mathfrak{M}_n$, existe-t-il toujours $A' \in \mathfrak{M}_n$ tel que $A \subset A'$ et $|A'| = n$?*

2.1 Description de $\mathfrak{M}_n$ pour $n \leq 3$

Si $A \in \mathfrak{M}_1$, alors $1 \in A$ et $|A| \leq 1$, d'où $A = \{1\}$.

Si $A \in \mathfrak{M}_2$, alors soit $A = \{2\}$, soit A est de la forme $\{2, 2k+1\}$ avec $k \geq 1$. Ces ensembles conviennent clairement.

Si $A \in \mathfrak{M}_3$, alors :

— Soit $A = \{3\}$

— Soit A est de la forme $\{3, 3k+1\}$ avec $k \geq 1$. On vérifie alors que A convient.

— Soit A est de la forme $\{3, 3l+2\}$ avec $l \geq 1$. On vérifie alors que A convient.

— Soit A est de la forme $\{3, 3k+1, 3l+2\}$ avec $k, l \geq 1$. On a alors des conditions nécessaires sur k et l. En effet, si $k \geq 2l+1$, alors $3k+1 = (k-2l-1)3 + 2(3l+2) \notin A$. De même si $l \geq 2k$ alors $3l+2 = 3(l-2k) + 2(3k+1) \notin A$. Ces situations sont bien sûr absurdes.
Donc $k < 2l+1$ et $l < 2k$. Montrons que, sous ces deux hypothèses supplémentaires, A convient. On va pour cela considérer les trois types possibles de contre-exemple.

1. Pour qu'une somme d'éléments de A soit égale à 3, il faut que ses termes soient inférieurs ou égaux à 3. Seule la somme triviale $3 = 3$ convient donc.
2. Si une somme d'éléments de A est égale à $3k+1$, et qu'elle est non triviale, elle n'implique que 3 et $3l+2$. Elle est donc de la forme $3u + (3l+2)v = 3k+1$, où on peut supposer $v \in \{0,1,2\}$ (quitte à augmenter u). La congruence modulo 3 impose $2v = 1 \mod 3$ soit $v = 2$. on a alors :
$$3k + 1 = 3u + 2(3l+2) = 3(u + 2l + 1) + 1$$
On a alors $k = u + 2l + 1 \geq 2l+1$, ce qui contredit notre hypothèse.
3. Si une somme d'éléments de A est égale à $3l+2$, et qu'elle est non triviale, elle n'implique que 3 et $3k+1$. Elle est donc de la forme $3u + (3k+1)v = 3l+2$, où on peut supposer $v \in \{0,1,2\}$ (quitte à augmenter u). La congruence modulo 3 impose $v = 2$. on a alors :
$$3l + 2 = 3u + 2(3k+1) = 3(u+2k) + 2$$
On a alors $l = u + 2k \geq 2k$, ce qui contredit notre hypothèse.

Le cas de $\mathfrak{M}_3$ est particulièrement intéressant, parce qu'il laisse entrevoir la complexité de la situation.

2.2 Tentative de caractérisation de $\mathfrak{M}_n$ pour n quelconque

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et une partie I de $[[1, n-1]]$.

Un ensemble de MELOTTI associé à I est nécessairement de la forme :
$$\{n\} \cup \{nk_i + i \mid i \in I\}$$
avec $\forall i \in I, k_i \geq 1$. On pose en outre $k_0 = 1$ et on définit $J = I \cup \{0\}$.

Soit un ensemble A de cette forme. On suppose qu'il n'est pas de MELOTTI. Cela signifie qu'il existe $j \in J$ obtenu comme une somme non triviale d'éléments de A. Il est clair que ça n'est pas possible pour $j = 0$, et donc $j \in I$. On peut écrire :
$$\begin{aligned} nk_j + j &= \sum_{i \in J \setminus \{j\}} a_i(nk_i + i) \\ &= n\left(\sum_{i \in J\setminus\{j\}} a_i k_i\right) + \sum_{i \in I \setminus \{j\}} a_i i \end{aligned}$$
où, quitte à augmenter a_0, on peut supposer tous les $(a_i)_{i \in I}$ dans $[[0, m-1]]$. On remarque que nécessairement, on a :
$$\sum_{i \in I\setminus\{j\}} a_i i = j \mod n$$
Désignons par α le quotient obtenu dans la division euclidienne de $\sum_{i \in I \setminus\{j\}} a_i i$ par n. On a alors :
$$k_j = \sum_{i \in J\setminus\{j\}} a_i k_i + \alpha$$

En s'inspirant du cas $n = 3$, on est alors tenté de faire l'hypothèse suivante :
Pour tout $j \in I$, pour toute famille $(a_i)_{i\in I\setminus\{j\}} \in [[0, n-1]]^{I\setminus\{j\}}$ vérifiant $\sum_{i\neq j} a_i i = j \mod n$, on a :

$$k_j < \sum_{i\in I\setminus\{j\}} a_i k_i + \frac{1}{n}\left(\sum_{i\in I\setminus\{j\}} a_i i - j\right)$$

Dans ce cas, on a bien une contradiction puisque :

$$k_j = \sum_{i\in J\setminus\{j\}} a_i k_i + \alpha \geq \sum_{i\in I\setminus\{j\}} a_i k_i + \alpha$$

La condition précédente est donc suffisante. Cependant, elle n'est pas très explicite, et il reste à montrer qu'elle est nécessaire.

Montrons d'abord que pour $n = 3$, $I = \{1, 2\}$, on retrouve bien la condition obtenue dans la sous-section précédente :

— Pour $j = 1$, il faut montrer que si $a_2 2 = 1 \mod 3$ (c'est-à-dire $a_2 = 2$) alors :

$$k_1 < a_2 k_2 + \frac{1}{3}(a_2 2 - 1) = 2k_2 + \frac{4-1}{3} = 2k_2 + 1$$

— Pour $j = 2$, il faut montrer que si $a_1 1 = 2 \mod 3$ (c'est-à-dire $a_1 = 2$) alors :

$$k_2 < a_1 k_1 + \frac{1}{3}(a_1 1 - 2) = 2k_1 + \frac{2-2}{3} = 2k_1$$

On retrouve donc bien les conditions précédentes.

Montrons à présent que la condition est nécessaire. On a un ensemble, supposé de Melotti, de la forme :

$$\{n\} \cup \{nk_i + i \mid i \in I\}$$

Soit $j \in I$ et une famille $(a_i)_{i\in I\setminus\{j\}} \in [[0, n-1]]^{I\setminus\{j\}}$ vérifiant $\sum_{i\neq j} a_i i = j$. On pose :

$$\alpha = \frac{1}{n}\left(\sum_{i\in I\setminus\{j\}} a_i i - j\right)$$

On a :

$$\sum_{i\neq j} a_i(nk_i + i) = n\left(\sum_{i\neq j} a_i k_i\right) + \sum_{i\neq j} a_i i = \left(\sum_{i\neq j} a_i k_i + \alpha\right) n + j$$

Supposons $k_j \geq (\sum_{i\neq j} a_i k_i) + \alpha$. Alors :

$$\begin{aligned} nk_j + j &= \left(k_j - \alpha - \sum_{i\neq j} a_i k_i\right) n + \left(\sum_{i\neq j} a_i k_i + \alpha\right) n + j \\ &= \left(k_j - \alpha - \sum_{i\neq j} a_i k_i\right) n + \sum_{i\neq j} a_i(nk_i + i) \end{aligned}$$

On a donc une somme non triviale d'éléments de A qui est dans A, ce qui contredit le fait que A soit de Melotti. Ainsi $k_j < (\sum_{i\neq j} a_i k_i) + \alpha$, d'où la conclusion. La condition précédente est donc bien une condition nécessaire et suffisante.

Par exemple, pour $(k_i) = 1$, on devrait être capable de prouver, lorsque $\sum_{i\neq j} a_i i = j \mod n$,

$$\forall j \in [[1, n-1]], 1 < \sum_{i\neq j} a_i + \frac{1}{n}\left(\sum_{i\neq j} a_i i - j\right)$$

Cela est clair si (a_i) contient au moins un terme supérieur à 2 ou si au moins deux termes sont non nuls. Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors a_i ne prend ses valeurs que parmi 0 et 1 et il y a exactement un terme non nul. Notons son indice i, on a $a_i = 1$. La congruence donne $i = j \mod n$ et donc $i = j$, ce qui est absurde. Donc la suite constante égale à 1 vérifie les conditions. Et, en effet, on a bien que $\{n, n+1, n+2, \ldots, 2n-1\}$ est un ensemble de Melotti.

L'équivalence précédente ramène l'étude des ensembles de Melotti à une question purement arithmétique :

Question 8. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et une partie I de $[[1, n-1]]$. Pour quelles valeurs de $(k_i)_{i \in I}$, $k_i \geq 1$ a-t-on la propriété suivante :*

Pour tout $j \in I$ et pour toute famille $(a_i)_{i \in I \setminus \{j\}} \in [[0, n-1]]^{I \setminus \{j\}}$ vérifiant $\sum_{i \neq j} a_i i = j \mod n$, on a :

$$k_j < \sum_{i \in I \setminus \{j\}} a_i k_i + \frac{1}{n} \left(\sum_{i \in I \setminus \{j\}} a_i i - j \right)$$

2.3 Complétion ?

On se pose la question suivante :

Question 9. *Un ensemble de* Melotti *$A \in \mathfrak{M}_n$ peut-il toujours être étendu en un $A' \in \mathfrak{M}_n$ de cardinal n ?*

Si la réponse est affirmative, on devrait être capable de le montrer en complétant élément par élément. Soit donc une partie $I \subsetneq [[1, n-1]]$ et un ensemble de Melotti de la forme suivante :

$$A = \{n\} \cup \{k_i n + i \mid i \in I\}$$

Soit $s \in [[1, n-1]] \setminus I$. Existe-t-il k tel que :

$$A' = A \cup \{kn + s\} \in \mathfrak{M}_n$$

On pose $J = I \cup \{s\}$ et $k_s = k$. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites $(a_i) \in [[0, n-1]]^I$ telles que $\sum_{i \in I} a_i i = s \mod n$ et pour tout $j \in I$, on pose $\mathcal{S}'_j$ l'ensemble des suites $(a_i) \in [[0, n-1]]^{J \setminus \{j\}}$ telles que $\sum_{i \in J \setminus \{j\}} a_i i = j \mod n$.

On obtient ces conditions :

$$\forall (a_i)_{i \in I} \in \mathcal{S}, k < \sum_{i \in I} a_i k_i + \frac{1}{n} \left(\sum_{i \in I} a_i i - s \right)$$

$$\forall j \in I, \forall (a_i)_{i \in J \setminus \{j\}} \in \mathcal{S}'_j, k_j < \sum_{i \in I \setminus \{j\}} a_i k_i + a_s k + \frac{1}{n} \left(\sum_{i \in I \setminus \{j\}} a_i i + a_s s - j \right)$$

On définit donc :

$$k = \min_{(a_i) \in \mathcal{S}} \sum_{i \in I} a_i k_i + \frac{1}{n} \left(\sum_{i \in I} a_i i - s \right) - 1$$

Et on fixe une suite $(b_i)_{i \in I} \in \mathcal{S}$ donnant le minimum. Vu la définition, il est clair que pour toute suite $(a_i) \in \mathcal{S}$ on a :

$$k < \sum_{i \in I} a_i k_i + \frac{1}{n} \left(\sum_{i \in I} a_i i - s \right)$$

Fixons $j \in I$ et une suite $(a_i) \in \mathcal{S}'_j$ (on notera $a = a_s$). Il nous reste à vérifier que :

$$k_j < \sum_{i \in I \setminus \{j\}} a_i k_i + ak + \frac{1}{n} \left(\sum_{i \in I \setminus \{j\}} a_i i + as - j \right)$$

On désignera par (RH) le membre de droite de cette inégalité.

Si $a = 0$, l'inégalité résulte immédiatement du fait que $A \in \mathfrak{M}_n$. On se place donc dans le cas $a \geq 1$.

Montrons que soit $a \geq 2$, soit il existe un $i \in I$ tel que $a_i \geq 1$. Supposons que $a = 1$ et que pour tout $i \in I$ on ait $a_i = 0$, alors puisque $(a_i)_{i \in J \setminus \{j\}} \in \mathcal{S}'_j$:

$$s = \sum_{i \in I \setminus \{j\}} a_i i + as = j \mod n$$

Ce qui contredit le choix de s. La même chose s'applique à (b_i) : soit $b_j \geq 2$, soit il existe $i \neq j$ tel que $b_i \geq 1$.

On sait donc toujours que soit $(RH) \geq 2k \geq 2$, soit $(RH) \geq 1 + k \geq 1 + 1 = 2$. On n'a donc à vérifier le résultat que lorsque $k_j \geq 2$. On suppose donc $k_j \geq 2$.

Remarquons que $ak \geq a \left(\sum_{i \in I} b_i k_i - 1 \right)$.

— Si $b_j \geq 2$, on a $(RH) \geq ak \geq b_j k_j - 1 \geq 2k_j - 1 > k_j$.

— Si $b_j = 1$, $a \geq 2$, alors il existe un $i \neq j$ tel que b_i soit non nul, et alors :

$$(RH) \geq ak \geq 2(k_j + b_i k_i - 1) \geq 2(k_j + 1 - 1) > k_j$$

— Si $b_j = 1$, $a = 1$, alors il y a un $i \neq j$ tel que $b_i \geq 1$, ainsi qu'un $l \in I$ tel que $a_l \geq 1$. On a alors

$$(RH) \geq a_l k_l + k \geq 1 + (k_j + k_i b_i - 1) \geq 1 + k_j + 1 - 1 > k_j$$

— Si $b_j = 0$, calculons :

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in I \setminus \{j\}} (a_i + ab_i)i &= \left(\sum_{i \in I \setminus \{j\}} a_i i \right) + a \left(\sum_{i \in I \setminus \{j\}} b_i i \right) \\
&= (j - as) + a(s - b_j j) \mod n \\
&= j \mod n
\end{aligned}$$

Donc la suite $(d_i)_{i \in I \setminus \{j\}}$, où $d_i = a_i + ab_i \mod n$, vérifie toutes les hypothèses pour qu'on puisse utiliser le fait que A est de Melotti :

$$k_j < \sum_{i \in I \setminus \{j\}} d_i k_i + \frac{1}{n} \left(\sum_{i \in I \setminus \{j\}} d_i i - j \right)$$

Notons α le membre de droite de cette inégalité. On note également $q_i = \frac{1}{n}(a_i + ab_i - d_i)$. On a :

$$\begin{aligned}
(RH) &= \sum_{i \in I \setminus \{j\}} a_i k_i + ak + \frac{1}{n} \left(\sum_{i \in I \setminus \{j\}} a_i i + as - j \right) \\
&= \sum_{i \in I \setminus \{j\}} a_i k_i + a \left(\sum_{i \in I \setminus \{j\}} b_i k_i + \frac{1}{n} \left(\sum_{i \in I \setminus \{j\}} b_i i - s \right) - 1 \right) + \frac{1}{n} \left(\sum_{i \in I \setminus \{j\}} a_i i + as - j \right) \\
&= \sum_{i \in I \setminus \{j\}} (a_i + ab_i)k_i + ab_j k_j - a + \frac{1}{n} \left(\sum_{i \in I \setminus \{j\}} (a_i + ab_i)i + ab_j j - as + as - j \right) \\
&= \sum_{i \in I \setminus \{j\}} (a_i + ab_i)k_i - a + \frac{1}{n} \left(\sum_{i \in I \setminus \{j\}} (a_i + ab_i)i - j \right) \\
&= \sum_{i \in I \setminus \{j\}} d_i k_i - a + \frac{1}{n} \left(\sum_{i \in I \setminus \{j\}} d_i i - j \right) + \left(\sum_{i \in I \setminus \{j\}} q_i (i + nk_i) \right) \\
&= \alpha - a + \sum_{i \in I \setminus \{j\}} q_i (i + nk_i)
\end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer

$$\sum_{i \in I \setminus \{j\}} q_i (i + nk_i) \geq a$$

Puisque $nk_i \geq n > a$, il suffit effectivement de montrer qu'il existe un q_i non nul. Supposons donc que pour tout $i \neq j$, on ait $a_i + ab_i < n$.