Anneaux Fadéliens

Département de Mathématiques Inapplicables

6 juin 2019

“I don’t know anything, but I do know that everything is interesting if you go into it deeply enough.”

– R. Feynman

1 Généralités

1.1 Définitions

De nombreuses notions d’« inversiblité faible » ont déjà été étudiées, nous en proposons ici une nouvelle. À notre connaissance, elle n’a jamais été étudiée. Dans le cas non-commutatif, il est tentant de considérer le cas où on peut effectuer des « divisions partielles » à gauche et à droite sans avoir pour autant d’inverse. Cela motive la définition suivante :

Définition 1. *Un anneau $A \neq 0$ est dit* fadélien *lorsque :*

$$\forall x \in A, \forall a \in A \setminus \{0\}, \exists (b, c) \in A^2, ab + ca = x$$

Remarque 2. *Une algèbre à division (c’est-à-dire un anneau dans lequel tout élément non nul est inversible) est fadélienne (prendre $b = a^{-1}x$ et $c = 0$).*

Le premier objectif de notre étude est d’aller aussi loin que possible dans la recherche d’une réciproque à cette remarque, en essayant de voir jusqu’à quel point un anneau fadélien peut s’éloigner d’une algèbre à division.

Définition 3. *Un anneau $A \neq 0$ est dit* faiblement fadélien *lorsque :*

$$\forall a \in A \setminus \{0\}, \exists (b, c) \in A^2, ab + ca = 1$$

Un anneau fadélien est évidemment faiblement fadélien, et nous essaierons également de déterminer s’il existe des anneaux faiblement fadéliens non fadéliens.

Non-exemple 4. *Si k est un corps et $n \geq 2$ alors $M_n(k)$ n’est pas faiblement fadélien.*

Preuve. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Alors AB et CA ont toujours leur coefficient en bas à droite nul, et on ne peut donc pas avoir $I = AB + CA$. □

1.2 Premières propriétés

Remarque 5. *Un anneau A est (faiblement) fadélien si et seulement si A^{op} l’est.*

Remarque 6. *Un anneau commutatif est (faiblement) fadélien si et seulement si c’est un corps.*

Propriété 7. *Un anneau faiblement fadélien est simple, c’est-à-dire qu’il n’a pas d’idéaux bilatères non triviaux.*

Preuve. Soit I un idéal bilatère non nul d'un anneau faiblement fadélien A. Soit $a \in I$ non nul. Par hypothèse, il existe b et c tels que $1 = ab + ca$, mais alors $1 \in I$, ce qui montre que $I = A$. □

Corollaire 8. *Un anneau faiblement fadélien est muni d'une structure naturelle d'algèbre sur son centre, qui est un corps.*

Remarque 9. *De ce théorème, on déduit qu'un morphisme φ d'un anneau (faiblement) fadélien A dans un anneau non nul B quelconque est nécessairement injectif, car $Ker(\varphi)$ est un idéal bilatère ne contenant pas 1 et est donc nul.*

Définition 10. *Soit un anneau $A \neq 0$ et $a \in A$. On dit que a est onirique dans A lorsque $aA + Aa$ est un idéal bilatère de A.*

Proposition 11. *Soit un anneau A et un élément $a \in A$. Alors a est onirique si et seulement si $AaA \subset aA + Aa$, c'est-à-dire que :*

$$\forall d, e \in A, \exists b, c \in A, dae = ab + ca$$

(on peut se contenter de vérifier cette propriété pour d, e dans une base de A)

Preuve. Soit $a \in A$ onirique et $d, e \in A$. Puisque $da \in aA + Aa$ et que $aA + Aa$ est un idéal bilatère, on a bien $dae \in aA + Aa$.

Montrons le sens réciproque : soit $a \in A$ tel que $AaA \subset aA + Aa$. Il faut montrer que $I = aA + Aa$ est un idéal bilatère. Cet ensemble étant clairement additif, il ne reste qu'à montrer qu'il est absorbant à droite et à gauche. Soit $x \in I$, qu'on écrit $x = ab + ca$, et $d \in A$. Alors $xd = abd + cad$. Par hypothèse, $cad \in I$ et donc $xd \in I$. On a de même $dx \in I$, d'où le résultat. □

Définition 12. *Un anneau est dit onirique lorsque tous ses éléments sont oniriques.*

Proposition 13. *Un anneau A est fadélien si et seulement s'il est simple et onirique.*

Preuve. Le sens direct est clair. Réciproquement, si A est simple et onirique, alors pour $a \in A \setminus \{0\}$ quelconque, $aA + Aa$ est un idéal bilatère non nul (car il contient a) de A par oniricité, et c'est donc A par simplicité. □

Corollaire 14. *Soit A un anneau onirique et I un idéal bilatère maximal de A. Alors le quotient A/I est fadélien.*

1.3 Un peu de logique du premier ordre

Définition 15. *On note FR la théorie des anneaux fadéliens qui ne sont pas des algèbres à divisions. De même, on définit WFR la théorie des anneaux faiblement fadéliens qui ne sont pas fadéliens. Ces deux théories sont des théories du premier ordre ne nécessitant qu'un langage fini et un nombre fini d'axiomes.*

Des théorèmes classiques de logique nous permettent de dire les choses suivantes :

Proposition 16 (application directe du théorème de Löwenheim-Skolem). *S'il existe un anneau fadélien qui n'est pas une algèbre à division, il en existe un dénombrable (et, en fait, il en existe de tout cardinal infini). On peut dire la même chose des anneaux faiblement fadéliens non fadéliens.*

Proposition 17 (application du théorème de complétude de Gödel). *Si tout anneau faiblement fadélien est fadélien (par exemple), alors il existe une preuve de ce fait, qu'il est possible de trouver en temps fini.*

Preuve. L'hypothèse revient à dire que WFR n'a pas de modèle. Dans ce cas, d'après le théorème de complétude de Gödel, WFR est incohérente, ce qui signifie qu'il existe une preuve finie, à partir des axiomes de WFR, de $0 = 1$. Il suffirait donc de laisser un programme parcourir algorithmiquement l'arbre des preuves, ce qui est possible puisque la théorie WFR est finie et donc récursivement énumérable... □

De plus, il résulte immédiatement de la forme des axiomes, comme l'a fait remarquer M.R., que :

Remarque 18. *Les anneaux fadéliens (resp. faiblement fadéliens, oniriques) sont stables par union de chaîne (limite inductive) et par ultraproduit. De plus, les anneaux oniriques sont stables par produit et quotient (et par produit réduit, i.e. produit d'anneaux quotienté par un filtre).*

On peut lire des informations plus amples à ce sujet à l'adresse suivante : `http://lebarde.alwaysdata.net/dmi/FadModCat.pdf`.

Dans tout ceci, on a à peine utilisé la définition précise d'un anneau fadélien, qu'on aurait pu remplacer par n'importe quelle formule du premier ordre.

2 Un anneau faiblement fadélien est sans diviseurs de zéro

2.1 Le théorème

Lemme 19. *Soit A un anneau faiblement fadélien. Si x et y sont deux éléments de A non nuls tels que $xy = yx = 0$, alors $x^2 = y^2 = 0$.*

En particulier, si $xy = yx = 0$, alors soit x^2 soit y^2 est nul.

Preuve. On écrit $1 = xb + cx$, alors :

$$y^2 = y \times 1 \times y = yxby + ycxy = (yx)by + yc(xy) = 0$$

On a de même $x^2 = 0$. □

Corollaire 20. *Un anneau faiblement fadélien dans lequel $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ est sans diviseurs de zéro.*

Preuve. Il faut montrer : $xy = 0 \Rightarrow (x = 0) \vee (y = 0)$.

Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe des éléments x et y non nuls tels que $xy = 0$. Alors $(yx)^2 = y(xy)x = 0$, et donc $yx = 0$ par hypothèse.

Le lemme précédent s'applique alors et nous dit que $x^2 = y^2 = 0$, c'est-à-dire que $x = y = 0$, ce qui est absurde. □

Théorème 21. *(dû à R.K.) Tout anneau faiblement fadélien est sans diviseurs de zéro.*

Preuve. Raisonnons par l'absurde. D'après le corollaire précédent, il suffit de supposer qu'il existe $a \neq 0$ tel que $a^2 = 0$. On écrit $1 = ab + ca$.

Remarquons d'abord qu'on a $a = a1 = aca$ et $a = 1a = aba$, d'où $(ab)^2 = ab$ et $(ca)^2 = ca$.

Puisque $ab = 1 - ca$, on sait de plus que ab et ca commutent. Ainsi, $(ab)(ca) = (ca)(ab) = c(aa)b = 0$. On déduit ainsi, en utilisant le lemme vu précédemment, que $(ab)^2 = 0$ ou $(ca)^2 = 0$, c'est-à-dire que $ab = 0$ ou $ca = 0$.

Sans perte de généralité, plaçons-nous dans le cas où $ab = 0$. On a alors $1 = ca$, c'est-à-dire que a est inversible à gauche, ce qui contredit l'hypothèse $a^2 = 0$. □

Voilà ce qu'on sait à ce stade : tout anneau faiblement fadélien est une algèbre centrale simple sans diviseurs de zéro. Cette caractérisation n'est pas suffisante, comme le montre l'exemple suivant :

Non-exemple 22. *Soit un corps k de caractéristique nulle. L'algèbre de* Weyl *$A_1(k)$, engendrée (en tant que k-algèbre) par deux éléments X et Y vérifiant $XY - YX = 1$, est simple et sans diviseurs de zéro mais n'est pas faiblement fadélienne.*

Preuve. Pour tous $B, C \in A_1(k)$, le coefficient en X^0Y^0 de $(XY)B + C(XY)$ dans la base $(X^iY^j)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est nul et donc 1 n'est jamais atteint. □

2.2 Conséquences directes du théorème

Corollaire 23 (Reformulation du théorème pour les anneaux oniriques)**.** *Soit A un anneau onirique et I un idéal bilatère maximal de A. Alors I est complètement premier ($xy \in I \Rightarrow x \in I \vee y \in I$).*

Preuve. Le quotient A/I est fadélien. Il est donc sans diviseurs de zéro d'où le résultat. □

Corollaire 24. *Soit A un anneau faiblement fadélien et $a \in A$. Si a est inversible à gauche ou à droite, alors il est inversible à gauche et à droite, de même inverse. On peut donc parler d'éléments inversibles sans jamais préciser de quel côté, et noter $A^\times$ l'ensemble des tels éléments.*

Preuve. Si $ad = 1$, alors $(1 - da)d = 0$ et $d \neq 0$ donc $da = 1$. □

Corollaire 25. *Soit A un anneau faiblement fadélien de centre k. Si la dimension de A comme k-espace vectoriel est finie, alors A est une algèbre à division.*

Preuve. Pour tout $a \neq 0$, l'endomorphisme $g_a : x \mapsto ax$ est injectif puisqu'il n'y a pas de diviseurs de zéro, et c'est donc un automorphisme puisque A est de dimension finie. Il existe donc un inverse à droite de a. Tout élément non nul de A est donc inversible, ce qui fait de A est une algèbre à division. □

Corollaire 26. *Soit A faiblement fadélien et un idéal à droite $I \subset A$ non nul tel que $\exists n, AI^n \subset I$. Alors $I = A$.*

Preuve. Soit $z \in I \setminus \{0\}$. D'après le théorème, $z^n \in I^n \setminus \{0\}$. On écrit alors $1 = z^n a + bz^n \in I + AI^n \subset I$ et on en déduit que $I = A$. □

3 Étude des idéaux unilatères

3.1 Généralités

On s'intéresse aux idéaux à gauche ou à droite d'un anneau (faiblement) fadélien. L'absence de diviseurs de zéro montre qu'un idéal à gauche I non nul et un idéal à droite J non nul ont une intersection non réduite à 0 (elle contient les produits ji pour $i \in I, j \in J$ non nuls). Cela donne donc intuitivement une raison de penser que les idéaux sont « gros ». Nous essayons d'apporter des arguments supplémentaires dans cette direction.

Théorème 27. *Soit un anneau A, I_g un idéal à gauche non nul de A et I_d un idéal à droite non nul de A. On définit $I_+ = I_g + I_d$. Alors : si A est faiblement fadélien, $1 \in I_+$ et si A est fadélien, $I_+ = A$.*

Plus généralement, dans tout anneau sans diviseurs de zéro :

$$\bigcap_{I_g \neq 0, I_d \neq 0} I_g + I_d = \bigcap_{a \neq 0} aA + Aa$$

Preuve. Prouvons l'énoncé général. L'inclusion $\subset$ est triviale. Réciproquement, soit x un élément de $\bigcap_{a\neq 0} aA + Aa$, I_g, I_d des idéaux (à gauche et à droite, respectivement) non nuls de A. Soit $i \in I_g$ et $j \in I_d$ non nuls. Puisque A est sans diviseurs de zéro, ji est non nul. On sait en outre que $x \in jiA + Aji$, par exemple $x = j(ik) + (lj)i \in I_d + I_g$. □

Une conséquence utile de ce fait est que si on a un élément x et deux éléments y, z non nuls, on peut toujours écrire $x = ya + bz$ (ou $1 = ya + bz$ dans le cas faiblement fadélien). Cela nous servira régulièrement.

Notons également ce résultat qui, s'il n'est pas spécifique aux anneaux fadéliens, est intéressant :

Théorème 28. *Un anneau A simple sans diviseurs de zéro possédant un nombre fini d'idéaux maximaux (par exemple à gauche) est une algèbre à division.*

Preuve. Commençons par démontrer ce lemme :

Lemme 29. *Si m est un idéal maximal à gauche et I un idéal à gauche quelconque non inclus dans m, tous deux non nuls et non égaux à A, alors $m \cap I$ est un idéal à gauche non nul.*

Preuve. De la maximalité de m et de $I \not\subset m$ on déduit $m + I = A$. En particulier 1 s'écrit $x + y$ avec $x \in m$ et $y \in I$, et x, y sont non nuls puisque $1 \notin m \cup I$. On a alors $y = yx + y^2$ soit $yx \in m = y - y^2 \in I$. Puisque $yx \neq 0$ (car A est sans diviseurs de zéro), on a bien un élément non nul de $m \cap I$. □

De ce lemme (en itérant), on déduit qu'une intersection finie d'idéaux maximaux non nuls est non nulle. En particulier, s'il y a un nombre fini d'idéaux maximaux à gauche, il y a deux options : ou alors 0 est l'un d'eux (et c'est alors le seul, on a une algèbre à division), ou alors leur intersection est un idéal non nul et distinct de A. Or, cette intersection est le radical de Jacobson, connu pour être un idéal bilatère, ce qui est impossible puisque A est simple. La seule possibilité restante est donc que A est un anneau à division. □

3.2 Interaction avec la propriété d'Ore

Une autre façon de penser à la taille des idéaux est de s'intéresser à l'intersection d'idéaux du même côté (tous deux à gauche ou à droite). Le lemme suivant montre que s'intéresser simultanément à la fadélianité et à cette idée a un intérêt :

Lemme 30. *Soit A faiblement fadélien et $a, x, y \in A$ tels que $aA \cap xA \neq 0$ et que $Aa \cap Ay \neq 0$. Alors $xy \in aA + Aa$.*

Preuve. Soit α non nul s'écrivant à la fois ab et xb', β non nul s'écrivant à la fois la et $l'y$. Puisque b' et l' sont non nuls, on peut écrire par faible fadélianité :

$$1 = b'k + k'l'$$

En multipliant à gauche par x et à droite par y, on obtient :

$$xy = xb'ky + xk'l'y = abky + xk'la \in aA + Aa$$

□

Un critère portant sur les intersections d'idéaux du même côté est la condition suivante, connue sous le nom de *condition d'*Ore : un anneau sans diviseurs de zéro est d'Ore à gauche si deux quelconques de ses idéaux à gauche non nuls ont une intersection non nulle (et similairement pour d'Ore à droite). On a le théorème suivant :

Théorème 31. *Un anneau A à la fois faiblement fadélien et d'*Ore *(à gauche ou à droite) est fadélien.*

Preuve. Considérons le cas où A est d'Ore à droite. Soit x et a deux éléments non nuls. On sait que $aA \cap xA \neq 0$ car l'anneau est d'Ore à droite, on sait que $Aa \cap A1 = Aa \cap A = Aa \neq 0$ et donc, d'après le lemme précédent (avec $y = 1$), on a $x \in aA + Aa$. □

Ce résultat est assez contraignant, puisque la condition d'Ore est assez facilement vérifiée, par exemple pour les anneaux nœthériens (du même côté). Trouver des anneaux faiblement fadéliens non fadéliens risque donc d'être compliqué.

4 Cas des anneaux de polynômes différentiels

4.1 Définitions

Définition 32. *Soit k un corps et A une k-algèbre, munie d'une dérivation D, c'est-à-dire d'une application $D : A \to A$ k-linéaire vérifiant :*

$$\forall a, b \in A,\ D(ab) = D(a)b + aD(b)$$

Soit de plus, pour tout élément $x \in A$, l'application k-linéaire $\tilde{x} : A \to A$ définie par :

$$\tilde{x}(y) = xy$$

On note alors A_D le sous-anneau de $Hom_{k-Vect}(A, A)$ engendré par D et les $(\tilde{x})_{x \in A}$.

Remarque 33. *Il existe un morphisme canonique d'anneaux $i : A \to A_D$ injectif donné par $i(x) = \tilde{x}$. On identifiera désormais un élément de A et son image dans A_D.*

Pour éviter les confusions, par exemple entre l'élément $Da \in A_D$ et l'image $D(a) \in A$ de a par D, nous écrirons systématiquement a' pour désigner cette dernière.

Une fois ces conventions fixées, la propriété vérifiée par D se réécrit :

$$\forall a \in A, Da = a' + aD$$

Remarque 34. *Dès l'instant que D est une dérivation non nulle, A_D est un anneau non commutatif (soit a tel que $a' \neq 0$, alors $Da - aD = a' \neq 0$). Si $D = 0$, alors $A_D = A$.*

Fait 35. *Un élément x quelconque de A_D peut se mettre sous la forme $x = \sum_{i=0}^{k} a_i D^i$, où $k \in \mathbb{N}$ et $\forall i, a_i \in A$ (on peut prouver ce fait en déplaçant des D vers la droite dans un produit avec l'identité $Da = a' + aD$).*

Par un léger abus de notation, on notera $x = P(D)$ où $P = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i \in A[X]$. Il faut faire attention au fait que $P \mapsto P(D)$ n'est pas un morphisme d'anneaux.

L'algèbre de Weyl, dont nous avons déjà parlé (et vu qu'elle n'était pas fadélienne), est par exemple isomorphe à $k[X]_D$ où D est la dérivation canonique sur $k[X]$.

On cherche à obtenir des conditions (nécessaires, puis suffisantes) sur A pour que A_D soit fadélien. Dans la suite, on suppose systématiquement $D \neq 0$, sans quoi $A_D = A$ et il n'y a rien d'intéressant à dire.

On peut généraliser ce concept pour obtenir des « extensions d'Ore » quelconques.

4.2 Condition nécessaire de fadélianité

Proposition 36. *Si A_D est faiblement fadélien, alors A est une algèbre à division (rappelons qu'on a supposé $D \neq 0$) et A_D est fadélien.*

Preuve. Soit $a \in A \setminus \{0\}$. Écrivons $1 = bD + ac$ dans A_D. En évaluant cette égalité de morphismes en 1, on obtient $1 = ac(1)$. L'élément $c(1) \in A$ est donc inverse à droite de a. De plus, il n'y a pas de diviseurs de zéro dans A puisque sinon il y en aurait dans A_D (qui est faiblement fadélien). On en déduit que a est inversible dans A. On a bien montré que A est une algèbre à division.

En particulier, A est nœthérien (à gauche, par exemple) et donc A_D l'est également (c'est une propriété générale des extensions d'Ore). L'anneau A_D vérifie donc la condition d'Ore (du même côté) et puisqu'il est faiblement fadélien, il est donc fadélien (se référer au paragraphe « Interaction avec la propriété d'Ore »). $\square$

Il n'y a donc pas lieu de distinguer faiblement fadélien et fadélien dans la situation présente. On peut alors énoncer la principale autre condition nécessaire :

Proposition 37. *Si A_D est fadélien, alors tout élément X de $A_D \setminus \{0\}$ est surjectif.*

Preuve. L'anneau A étant une algèbre à division, tout élément non nul de A, vu comme élément de A_D, est surjectif. On suppose donc $X \in A_D \setminus A$. Soit $a \in A$. Par fadélianité de A_D, on peut écrire, dans A_D :

$$\tilde{a} = bD + Xc$$

En évaluant cette égalité de morphismes en 1, on obtient $a = a \times 1 = b(1') + X(c(1)) = X(c(1))$, donc $a \in Im(X)$. Le morphisme X est donc surjectif.

Ainsi, on peut « trouver dans A une solution à toute équation différentielle linéaire à coefficients dans A ». $\square$

4.3 Condition suffisante de fadélianité

On prouve ici le résultat suivant :

Théorème 38 (dû à R.K.). *Soit A un anneau commutatif muni d'une dérivation D. Alors A_D est fadélien si et seulement si tout endomorphisme non nul de A_D est surjectif (c'est notamment le cas si A est différentiellement clos, ce qui fournit des exemples non-triviaux d'anneaux fadéliens dès que $D \neq 0$).*

Preuve. Le sens direct a été établi dans les paragraphes précédents. On se place donc dans le cas où A est un corps (commutatif) muni d'une dérivation non nulle D telle que les endomorphismes non nuls de A_D soient surjectifs. On va d'abord démontrer quelques lemmes.

Lemme 39. *Soit $u \in A_D$. Il existe un unique $P \in A[X]$ tel que $u = P(D)$. On peut donc définir $\theta(u) = \deg(P)$. L'application $\theta : A_D \to \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ est un stathme pour lequel A_D possède une division euclidienne à gauche et à droite.*

Preuve. L'existence de P a déjà été prouvée sans plus d'hypothèses. Prouvons donc l'unicité.

On a supposé $D \neq 0$. Par hypothèse, D est donc surjective, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, D^n l'est également. On peut donc fixer $x_n \in A$ tel que $D^n(x_n) = 1$. On suppose que $P(D) = Q(D)$. On écrit $P = \sum_{i=0}^{r} p_i X^i$, $Q = \sum_{i=0}^{s} q_i X^i$.

Montrons par récurrence forte sur i que $\forall i, p_i = q_i$:

$$\begin{aligned} P(D)(1) &= \sum p_i D^i(1) = 0 + p_0 1 = p_0 \\ &= Q(D)(1) = q_0 \end{aligned}$$

Donc $p_0 = q_0$.

Ensuite, si on suppose $p_i = q_i$ pour $i < k$:

$$\begin{aligned} P(D)(x_k) - \sum_{i=0}^{k-1} p_i D^i(x_k) &= \sum_{i \geq k} p_i D^i(x_k) = 0 + p_k 1 = p_k \\ &= Q(D)(x_k) - \sum_{i=0}^{k-1} q_i D^i(x_k) = \sum_{i \geq k} q_i D^i(x_k) = q_k \end{aligned}$$

D'où l'unicité par récurrence.

Soit $x, y \in A_D$, y étant non nul. On prouve la division euclidienne (par exemple à gauche) par récurrence sur $\theta(x)$.

Si $\theta(x) < \theta(y)$, alors $x = 0y + x$ convient.

Sinon, on écrit $y = \sum_{i=0}^{r} y_i D^i$ avec $y_r \neq 0$, $x = \sum_{i=0}^{s} x_i D^i$ avec $x_s \neq 0$. On a supposé $s \geq r$

On pose $\alpha = x_s {y_r}^{-1} D^{s-r}$. Calculons αy :

$$\alpha y = x_s {y_r}^{-1} \sum_{i=0}^{r} D^{s-r} y_i D^i$$

De la formule de Leibniz, on déduit :

$$D^{s-r} y_i = \sum_{k=0}^{s-r} \binom{s-r}{k} y_i^{(s-r-k)} D^k$$

D'où :

$$\alpha y = x_s {y_r}^{-1} \sum_{i=0}^{r} \sum_{k=0}^{s-r} \binom{s-r}{k} y_i^{(s-r-k)} D^{k+i}$$

En particulier, $\alpha y = Z(D)$ où Z est de degré $r + s - r = s$ (obtenu quand les deux indices sont maximaux) et de coefficient dominant $x_s {y_r}^{-1} \binom{s-r}{s-r} y_r^{(s-r-(s-r))} = x_s {y_r}^{-1} y_r = x_s$. Pour cette raison,

$\theta(x-\alpha y) < \theta(x)$ et donc $x-\alpha y$ s'écrit $qy+r$ avec $\theta(r) < \theta(y)$ (par hypothèse de récurrence). On a alors la forme souhaitée $x = (\alpha+q)y+r$. □

Lemme 40. *Soit un système d'inconnues $b_0, \dots, b_r$ de la forme suivante :*

$$\forall j, \sum_{i=0}^{r} P_{i,j}(b_i) = x_i$$

où $x_i \in A$, $P_{i,j} \in A_D$ et

$$\deg(P_{i,i}) > \max\{\deg(P_{i,j}) \mid j \neq i\}$$

alors ce système admet une solution dans A.

Preuve. On décrit un algorithme transformant un système à coefficients dans A_D en un système équivalent et diagonal :

1. Si le système est nul ou vide, on s'arrête, sinon, quitte à permuter des lignes et des colonnes, $P_{0,0}$ est non nul.
2. Pour $i \neq 0$, on calcule la division euclidienne $P_{i,0} = A_i P_{0,0} + R_{i,0}$ puis on soustrait à la i-ème ligne la première ligne multipliée (à gauche) par A_i. On fait exactement la même chose avec les colonnes, en faisant une division euclidienne à droite à la place. Le degré de $P_{0,0}$ majore alors strictement ceux des autres polynômes de sa ligne et de sa colonne. On échange ensuite la première colonne avec l'une des autres dont le coefficient sur la première ligne est non nul (s'il en existe) ou, sinon, on échange la première ligne avec l'une des autres dont le coefficient sur la première colonne est non nul. S'il n'en existe pas, on passe à l'étape suivante. Sinon, on reprend l'étape 2 avec la matrice obtenue. Le degré de $P_{0,0}$ décroissant strictement à chaque échange, l'opération s'arrête, autrement dit, à un certain moment, $P_{0,0}$ est le seul coefficient non nul de sa colonne et de sa ligne.
3. On reproduit la même chose sur la sous-matrice $P_{\geq 1, \geq 1}$, et ainsi de suite.

Si on applique cet algorithme à notre système, on apprend en fin de compte qu'il est équivalent à un système diagonal du type $\tilde{x_i} = \tilde{P_i}(\tilde{b_i})$, avec $\tilde{P_i} \in A_D$. Si on montre que les $\tilde{P_i}$ sont tous non nuls, ce système admettra une solution par hypothèse. Pour que tous les coefficients diagonaux après transformation soient non nuls (i.e. que la matrice obtenue à la fin soit injective), il suffit de montrer que la matrice de $M_r(A_D)$ correspondant au système initial est injective (en tant qu'endomorphisme de A_D). Supposons $\forall i, \sum_{j=0}^{r} P_{i,j} Q_j = 0$ pour une famille $(Q_i) \in (A_D)^{r+1}$ non nulle. Soit m un indice tel que $\forall i, \deg(Q_m) \geq \deg(Q_i)$. On a $\sum_{j \neq m}^{r} P_{m,j} Q_j = -P_{m,m} Q_m$ d'où :

$$\begin{aligned}
\deg(Q_m) &\leq \max_{j \neq m}(\deg P_{m,j} + \deg Q_j) - \deg P_{m,m} \\
&\leq \max_{j \neq m}(\deg P_{m,j}) + \deg Q_m - \deg P_{m,m} \\
&< \deg P_{m,m} + \deg Q_m - \deg P_{m,m} = \deg(Q_m)
\end{aligned}$$

Ceci est une contradiction manifeste. □

Il ne reste pour conclure qu'à prouver un lemme :

Lemme 41. *Soit un élément $\sum_{i=0}^{n} c_i D^i$ de A_D, avec $c_n \neq 0$. Alors il existe $a_0, \dots, a_{n-1}, b_0, \dots, b_{n-1}$ tels que :*

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i D^i\right)\left(\sum_{i=0}^{n} c_i D^i\right) + \left(\sum_{i=0}^{n} c_i D^i\right)\left(\sum_{i=0}^{n-1} b_i D^i\right) = 1$$

Autrement dit, A_D est faiblement fadélien et donc fadélien.

Preuve. Aux degrés $0 \leq k \leq 2n-1$, l'équation correspondante (ayant pour inconnues les a_i et les b_i) donne après quelques transformations faciles :

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} a_i c_{k-j}^{(i-j)} + c_i b_{k-j}^{(i-j)} = \delta_{k0}$$

En utilisant les équations obtenues pour $n \leq k \leq 2n-1$, on exprime a_{k-n} en fonction des b_i sous cette forme :

$$a_{k-n} = \sum_{i=0}^{n-1} A_{i,k-n}(b_i)$$

où les $A_{i,k-n}$ sont des éléments de A_D (on utilise ici que A est commutatif, sinon certaines des multiplications seraient à droite) de degrés inférieurs à $n-1$.

En substituant les a_i par cette expression dans les équations obtenues pour $0 \leq k \leq n-1$, on en déduit un système ayant pour inconnues les b_i de la forme suivante :

$$\sum_{i=0}^{n-1} P_{i,k}(b_i) = \delta_{k,0}$$

où les $P_{i,k}$ sont des éléments de A_D tels que $P_{k,k}$ soit de degré n pour tout k, et que $P_{i,k}$ soit de degré inférieur à $n-1$ pour $i \neq k$.

D'après le lemme précédent, ce système admet une solution, qui nous permet de calculer les b_i puis les a_i, d'où la fadélianité. □

□

En particulier, si on prend un corps réputé différentiellement clos, on obtient un anneau fadélien qui n'est pas à division. Cela prouve l'existence d'anneaux fadéliens non triviaux (de caractéristique quelconque). Cette méthode ne nous permettra cependant pas de déterminer s'il existe des anneaux faiblement fadéliens non fadéliens, pour les raisons vues ci-dessus.

4.4 Une autre condition suffisante

On va voir une autre condition suffisante qui ne demande pas de supposer A commutatif, mais fait d'autres hypothèses a priori ni plus fortes ni plus faibles.

On commence par une définition :

Définition 42. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et A un anneau de centre k.*

On note $Eq_A(X_1, X_2, \ldots, X_{n+1})$ la k-algèbre engendrée par les éléments de A et par des indéterminées $X_1, \ldots, X_{n+1}$ ne vérifiant aucune relation de commutation non-obligatoire, c'est-à-dire qu'un élément de $Eq_A(X_1, X_2, \ldots, X_{n+1})$ est une somme finie de mots sur l'alphabet formé par les éléments de A et les indéterminées, avec pour seules relations les axiomes d'anneau, les égalités dans A, et la centralité des éléments de k. Les éléments de cet anneau représentent des « équations différentielles » dans A.

Il faut potentiellement préciser beaucoup de « coefficients » pour désigner un élément. Par exemple, $a_0 + a_1X_1a_2X_2a_3 + X_1a_4X_2a_5$ ne peut a priori pas être simplifié. Si A est commutatif, en revanche, $Eq_A(X_1, X_2, \ldots, X_{n+1})$ est simplement l'anneau usuel des polynômes en $n+1$ variables à coefficients dans A.

Si $P \in Eq_A(X_1, X_2, \ldots, X_{n+1})$ et que $x_1, \ldots, x_{n+1} \in A$, on notera $P(x_1, \ldots, x_{n+1})$ l'élément de A obtenu en remplaçant dans l'expression de P chaque X_i par x_i et en effectuant le calcul.

Théorème 43. *Soit A une k-algèbre (k étant le centre de A) munie d'une dérivation D. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $P \in Eq_A(X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}) \setminus A$, il existe un élément $f \in A$ tel que $P(f, f', f^{(2)}, \ldots, f^{(n)}) = 0$.*

Alors A_D est fadélien.

S'il est pénible de décrire correctement $Eq_A(X_1, X_2, \ldots, X_{n+1})$, l'hypothèse n'est finalement pas difficile à comprendre : elle signifie simplement que toute équation différentielle en f ne faisant intervenir que des dérivées de f, des multiplications (ou des puissances), des éléments de A et des sommes, et qui dépend effectivement de f, admet une solution (on pourrait probablement parler d'« équation différentielle polynomiale »). Comme la précédente, cette hypothèse est satisfaite lorsque A est un corps différentiellement clos.

Preuve.

1. Tout d'abord, il est clair que tout morphisme de $A_D \setminus \{0\}$ est surjectif avec cette hypothèse (en particulier A est une algèbre à division), ce qui permet de montrer le premier lemme de la preuve précédente (existence de stathme et division euclidienne) sans rien changer à la preuve.
2. Si on prend un élément $x \in A_D \setminus A$ quelconque et qu'on calcule le reste de la division euclidienne de x par $D - f$, pour un élément indéterminé f de A, on obtient une formule de la forme $P(f, f', f^{(2)}, \dots, f^{(n)})$ avec $P \in Eq_A(X_1, X_2, \dots, X_{n+1}) \setminus A$. Par hypothèse, il existe donc une valeur de f telle que ce reste soit nul, c'est-à-dire que $x = y(D - f)$. En itérant, on démontre que tout élément x de A_D se met sous la forme suivante :
$$x = f_0(D - f_1)(D - f_2) \dots (D - f_r)$$
3. Soit $a_1, a_2 \in A$, montrons qu'on peut toujours écrire $1 = (D - a_1)f + g(D - a_2)$ avec $f, g \in A$. L'équation suivante :
$$(D - a_1)f - f(D - a_2) = (fD + f') - a_1 f - f(D - a_2) = f' - a_1 f + f a_2$$
définit un élément $X_2 - a_1 X_1 + X_1 a_2 \in Eq_A(X_1, X_2, \dots, X_{n+1}) \setminus A$ qui admet donc une solution par hypothèse.
Remarquons que si $a \in A \setminus \{0\}$, alors $aA_D = A_D$ puisque A est un corps. Ainsi, ce qu'on vient de montrer vaut toujours si on remplace l'un ou les deux des éléments de la forme $D - a_i$ par des éléments de A, car $(D - a_i)A_D \subset aA_D$.
4. Appelons H l'ensemble des éléments qui sont de la forme $D - a_i$ ou qui appartiennent à $A \setminus \{0\}$. On a montré (point 2) que H engendre multiplicativement $A_D \setminus \{0\}$.
Soit $c \in A_D \setminus \{0\}$. On pose
$$S_c = \{u \in A_D \setminus \{0\} \mid uA_D + A_D c = A_D\}$$
$$T_c = \{u \in A_D \setminus \{0\} \mid cA_D + A_D u = A_D\}$$
Le point 3 se reformule en disant que si $c \in H$, alors S_c et T_c contiennent tous les éléments de H. Si on montre que S_c et T_c sont multiplicatifs pour tous $c \in A_D \setminus \{0\}$, puisque H engendre multiplicativement $A_D \setminus \{0\}$, on saura que si $c \in H$, alors S_c est égal à $A_D \setminus \{0\}$, c'est-à-dire que $H \subset T_d$ pour tout d dans $A_D \setminus \{0\}$. Puisque de plus T_d est multiplicatif, on saura que $T_d = A_D \setminus \{0\}$ pour tout $d \in A_D \setminus \{0\}$, c'est-à-dire que A_D est fadélien.
Montrons par exemple que S_c est multiplicatif (pour un $c \in A_D \setminus \{0\}$ quelconque), l'autre preuve étant analogue.
Soit $u, v \in S_c$. Alors :
$$uA_D + A_D c = vA_D + A_D c = A_D$$
On en déduit :
$$A_D = uA_D + A_D c = u(vA_D + A_D c) + A_D c = uvA_D + A_D c$$
Donc $uv \in S_c$. Ceci conclut la preuve du théorème.

□

4.5 Que dire de l'exemple obtenu ?

Les conditions suffisantes précédentes permettent d'obtenir un anneau fadélien non trivial à partir d'un corps différentiellement clos. On remarque que :

— Pour la clôture différentielle, il faut utiliser l'axiome du choix. De plus contrairement aux clôtures algébriques, il n'y a a priori pas d'exemple explicite de corps différentiellement clos.

— L'anneau obtenu est nœthérien des deux côtés.

Pour la première remarque, M.R. a très justement fait remarquer qu'il existe forcément un modèle de la théorie des anneaux fadéliens non triviaux dans l'univers des constructibles (qui vérifie l'axiome du choix) d'un modèle de ZF fixé, et on peut donc se passer de l'axiome du choix.

Pour la seconde remarque, R.K. a prouvé la chose suivante :

Théorème 44. *Il existe un anneau fadélien non nœthérien (ni à gauche ni à droite).*

Preuve. L'idée essentielle est la suivante : les anneaux fadéliens sont stables par ultraproduit, ce qui n'est pas le cas en général des anneaux nœthériens. Il s'agit donc, à partir de l'exemple nœthérien obtenu, de calculer une ultrapuissance bien choisie de façon à obtenir un exemple non nœthérien.

Soit A_D un anneau fadélien du type précédent (avec (A, D) un corps différentiellement clos, $D \neq 0$). Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre libre sur $\mathbb{N}$, et $A_D^{\mathcal{U}}$ l'ultrapuissance $\prod_{n\in\mathbb{N}} A_D/\mathcal{U}$, qui est un anneau fadélien.

Soit $e_n \in A_D^{\mathcal{U}}$ la projection de $\hat{e}_n = (\underbrace{1_{A_D}, \ldots, 1_{A_D}}_{n \text{ coordonnées}}, D, D^2, D^3, \ldots) \in A_D^{\mathbb{N}}$ et I_n l'idéal (par exemple à gauche) de $A_D^{\mathcal{U}}$ engendré par (e_n). Puisque $\hat{e}_{n-1} = (\underbrace{1_{A_D}, \ldots, 1_{A_D}}_{n-1 \text{ coordonnées}}, D, D, D, \ldots)\hat{e}_n$, la suite d'idéaux (I_n) est croissante. Montrons qu'elle est strictement croissante. Supposons par l'absurde que pour un certain n on ait $e_n \in I_{n-1}$. Alors , pour un certain $a \in A_D^{\mathbb{N}}$, on a :

$$\hat{e}_n \sim a\hat{e}_{n-1} = (a^{(0)}, \ldots, a^{(n-1)}, Da^{(n)}, D^2a^{(n+1)}, \ldots)$$

On définit $\psi : A_D \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ de la façon suivante : si $x = \sum D^i x_i \neq 0$ avec $x_i \in A$, alors $\psi(x) = \min\{i \mid x_i \neq 0\}$, et $\psi(0) = +\infty$. L'application ψ est bien définie puisque la décomposition $\sum D^i x_i$ est unique (voir la preuve du premier lemme de la condition suffisante). Alors :

$$\psi(a\hat{e}_{n-1}) = (\psi(a^{(0)}), \ldots, \psi(a^{(n-1)}), \psi(a^{(n)}) + 1, \psi(a^{(n+1)}) + 2, \ldots) \geq (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, 2, 3, \ldots)$$

Où $\geq$ signifie qu'il y a une inégalité coefficient par coefficient. Or :

$$\psi(\hat{e}_n) = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

Donc $\mathcal{I} = \{k \in \mathbb{N} \mid \hat{e}_n^{(k)} = a^{(k)}\hat{e}_{n-1}^{(k)}\}$, dont on a supposé qu'il appartenait à $\mathcal{U}$, est un sous-ensemble de $[[0, n-1]]$ (sinon, cela contredit l'inégalité des ψ). L'ultrafiltre $\mathcal{U}$ est libre et ne peut donc pas contenir une partie finie de $\mathbb{N}$, ce qui conduit à une absurdité. Ainsi (I_n) est une suite strictement croissante d'idéaux à gauche de $A_D^{\mathcal{U}}$, qui n'est donc pas nœthérien à gauche. On a le même résultat pour les idéaux à droite engendrés par les (e_i), ce qui donne le résultat désiré. □

On sait donc qu'il existe des anneaux fadéliens non nœthériens, et en particulier ceux-ci ne sont pas des anneaux de polynômes différentiels. Pour la condition d'Ore, la même méthode ne peut pas être employée, puisque la propriété d'Ore est stable par ultrapuissance.

Question 45. *Tout anneau fadélien est-il d'*Ore *?*

La réponse à cette question, négative, sera apportée plus tard.

5 Complétion d'anneaux en anneaux fadéliens

5.1 Ce qui ne marche pas

On pourrait se demander, en s'inspirant de la construction de l'anneaux des fractions, si ceci est vrai :

Question 46. *Pour tout anneau A, il existe un anneau A_{fad} fadélien tel que A s'injecte dans A_{fad} et que toute injection de A dans un anneau fadélien se factorise uniquement par A_{fad}.*

Ceci est faux. Déjà, il est nécessaire que A soit sans diviseurs de zéro pour qu'il s'injecte dans un anneau fadélien. Mais même si on sait que A s'injecte dans un anneau fadélien, il n'en existe pas d'« universel » comme le montre l'exemple suivant :

Soit (k, D) un corps (commutatif) différentiellement clos. Soit k_0 le corps des éléments de k de dérivée nulle, c'est-à-dire $\ker(D)$, puis soit $A = k_0[X]$. Supposons qu'il existe un anneau A_{fad} satisfaisant la condition cherchée.

D'une part, A s'injecte dans l'anneau fadélien $k_0(X)$ (qui est en fait un corps commutatif) et donc A_{fad} aussi. En particulier, A_{fad} est un anneau fadélien commutatif (donc un corps), par lequel se factorisent uniquement toutes les injections de A dans des corps (qui sont des anneaux fadéliens particuliers), il en résulte que $A_{fad} = Frac(A) = k_0(X)$.

D'autre part, A s'injecte (par le morphisme induit par l'inclusion $k_0 \subset k$ et par $X \mapsto D$) dans k_D. Donc A_{fad} s'injecte dans k_D.

On peut dire les choses suivantes de l'injection $k_0(X) \to k_D$ obtenue : elle fixe k_0 et envoie X sur D. Sauf que, D n'étant pas inversible dans k_D, cela est impossible. Contradiction.

5.2 Tentative de construction abstraite

Soit un anneau A. On se pose la question suivante :

Question 47. *Quand est-ce qu'il existe un morphisme de A dans un anneau fadélien ? Quand est-ce qu'il existe un tel morphisme injectif ?*

Introduisons l'objet suivant :

Définition 48. *Soit A un anneau. On définit $\mathcal{F}(A)$ comme l'anneau*

$$A[\{G_{x,a}, D_{x,a}\}_{(x,a)\in A^2, a\neq 0}\}]/I$$

où $A[\{G_{x,a}, D_{x,a}\}]$ est l'anneau des polynômes formels sur A avec pour indéterminées les $G_{x,a}, D_{x,a}$ ($x \in A$, $a \in A \setminus \{0\}$) et aucune relation de commutation supplémentaire, et où I est l'idéal bilatère de $A[\{G_{x,a}, D_{x,a}\}]$ engendré par les polynômes $x - G_{x,a}a - aD_{x,a}$, pour tous $x \in A$ et $a \in A \setminus \{0\}$.

Il y a un morphisme canonique

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\iota_0"] \arrow[d, "x\mapsto x"'] & \mathcal{F}(A) \\ A[\{G_{x,a}, D_{x,a}\}] \arrow[ur, "\pi"'] & \end{tikzcd}$$

Ce qui permet de définir le système inductif suivant (avec $\mathcal{F}^n = \mathcal{F} \circ \mathcal{F} \circ \ldots \circ \mathcal{F}$) :

$$A = \mathcal{F}^0(A) \overset{\iota_0}{\to} \mathcal{F}^1(A) \overset{\iota_1}{\to} \mathcal{F}^2(A) \overset{\iota_2}{\to} \ldots$$

On note $\hat{\mathcal{F}}(A)$ la limite inductive de ce système, et ψ_n le morphisme canonique $\mathcal{F}^n(A) \to \hat{\mathcal{F}}(A)$.

$$\hat{\mathcal{F}}(A) = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}^n(A)$$

Proposition 49. *$\hat{\mathcal{F}}(A)$ est soit nul soit fadélien.*

Preuve. Supposons $\hat{\mathcal{F}}(A)$ non nul. Soit $x, a \in \hat{\mathcal{F}}(A)$ avec $a \neq 0$. On veut montrer qu'il existe $g, d \in \hat{\mathcal{F}}(A)$ tels que $x = ga + ad$.

Par construction, il existe un entier n et des éléments $\tilde{x}$, $\tilde{a}$ de $\mathcal{F}^n(A)$ tels que $x = \psi_n(\tilde{x})$ et $a = \psi_n(\tilde{a})$.

Dans $\mathcal{F}^{n+1}(A)$, on a par construction :

$$\iota_n(\tilde{x}) = G_{\tilde{x},\tilde{a}}\iota_n(\tilde{a}) + \iota_n(\tilde{a})D_{\tilde{x},\tilde{a}}$$

D'où, dans $\hat{\mathcal{F}}(A)$:

$$\psi_{n+1}(\iota_n(\tilde{x})) = \psi_{n+1}(G_{\tilde{x},\tilde{a}})\psi_{n+1}(\iota_n(\tilde{a})) + \psi_{n+1}(\iota_n(\tilde{a}))\psi_{n+1}(D_{\tilde{x},\tilde{a}})$$

or $\psi_{n+1} \circ \iota_n = \psi_n$ et $\psi_n(\tilde{x}) = x, \psi_n(\tilde{a}) = a$, donc :

$$x = \psi_{n+1}(G_{\tilde{x},\tilde{a}})a + a\psi_{n+1}(D_{\tilde{x},\tilde{a}})$$

□

Lemme 50. *Il y a un isomorphisme canonique entre $\hat{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(A))$ et $\hat{\mathcal{F}}(A)$ (autrement dit : $\hat{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F} = \hat{\mathcal{F}}$)*
Notamment : $(\hat{\mathcal{F}})^2 = \hat{\mathcal{F}}$.

Preuve. Il suffit de montrer que $\hat{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(A))$ (limite inductive de $(\mathcal{F}^n(A))_{n\geq 1}$) vérifie la propriété de limite inductive de $(\mathcal{F}^n(A))_{n\geq 0}$. Le seul problème est la définition de ψ_0, mais en posant : $\psi_0 = \psi_1 \circ \iota_0$, il est clair que tout fonctionne. □

Remarque 51. *On pourrait en fait obtenir $\hat{\mathcal{F}}(A)$ comme un quotient de l'anneau des "polynômes" sur A avec une infinité (de cardinal $\max(\aleph_0, |A|)$) d'indéterminées, autrement dit :*

$$\hat{\mathcal{F}}(A) = A[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{X}_n]/I$$

où on définit les ensembles d'indéterminées $\mathcal{X}_n$ par récurrence ainsi : $\mathcal{X}_n$ est l'ensemble des $G^{[n]}_{x,a}, D^{[n]}_{x,a}$ pour tous les $(x, a), a \neq 0$ éléments de l'anneau $A[\bigcup_{k<n} \mathcal{X}_k]$, et où I est l'idéal engendré par les $x - G^{[n]}_{x,a}a - aD^{[n]}_{x,a}$, pour tous les n et pour tous les $(x, a), a \neq 0$ qui sont dans $A[\bigcup_{k<n} \mathcal{X}_k]$, plongé canoniquement dans $A[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{X}_n]$. Il est clair que les deux constructions sont équivalentes.

En particulier :

- *$\hat{\mathcal{F}}(A) = 0$ si et seulement si $\mathcal{F}^n(A)$ est nul pour n assez grand (car le quotient est trivial si et seulement si I contient 1, auquel cas on l'obtient à partir d'un nombre fini d'indéterminées seulement).*
- *$|\hat{\mathcal{F}}(A)| \leq \max(\aleph_0, |A|)$, ce qu'on peut aussi voir directement en remarquant que $|\mathcal{F}(A)| \leq |A| \max(|A|, \aleph_0)$ (où $\max(|A|, \aleph_0)$ est le nombre de monômes de l'anneau de polynômes $A[G_{x,a}, D_{x,a}]$) et donc $|\mathcal{F}(A)| \leq |A|\aleph_0$, d'où :*

$$|\hat{\mathcal{F}}(A)| \leq \sum_n |\mathcal{F}^n(A)| \leq \sum_n \aleph_0^n|A| = \sum_n \aleph_0|A| = \aleph_0\aleph_0|A| = \aleph_0|A|$$

Définition 52. *On peut, de la même manière, faire la construction suivante : soit A un anneau, alors on pose*

$$\Omega(A) = A[\{G_{a,b,c}, D_{a,b,c}\}_{a,b,c\in A}]/I$$

où I est l'idéal engendré par les $bac - G_{a,b,c}a - aD_{a,b,c}$. On a de même un système inductif $\Omega^n(A) \to \Omega^{n+1}(A)$ d'où une limite inductive $\hat{\Omega}(A)$, qui est onirique ou nulle, et qui est nulle si et seulement si $\Omega^n(A)$ est nul à partir d'un certain n.

Proposition 53. *Soit A un anneau et $f : A \to B$ un morphisme de A dans un anneau onirique B. Alors :*

1. *$\hat{\Omega}(A) \neq 0$*

2. *il existe un morphisme $\hat{\Omega}(A) \xrightarrow{\tilde{f}} B$ non canonique tel que $\tilde{f} \circ \tilde{\iota} = f$, où $\tilde{\iota}$ est le morphisme $A \to \hat{\Omega}(A)$ canonique.*

Preuve. Le deuxième point montrera directement le premier, puisque B est onirique et donc non nul. Construisons donc le morphisme.

Supposons qu'on a un morphisme $\Omega^n(A) \xrightarrow{\varphi_n} B$ (pour φ_0, on prend f). Il suffit de montrer qu'on peut définir un morphisme $\Omega^{n+1}(A) \xrightarrow{\varphi_{n+1}} B$ tel que $\varphi_{n+1} \circ \iota_n = \varphi_n$, où ι_n est le morphisme $\Omega^n(A) \to \Omega^{n+1}(A)$ canonique. Cela induira un morphisme $\hat{\Omega}(A) \xrightarrow{\varphi} B$.

On définit le morphisme suivant $\Omega^n(A)[\{G_{a,b,c}, D_{a,b,c}\}] \xrightarrow{f_n} B$: pour chaque $(a, b, c) \in \Omega^n(A)^3$, on choisit par oniricité de B un couple $(g(a, b, c), d(a, b, c)) \in B^3$ tel que $\varphi_n(bac) = g(a, b, c)\varphi_n(a)+\varphi_n(a)d(a, b, c)$ et on pose :

$$\begin{array}{ccc} x \in \Omega^n(A) & \mapsto & \varphi_n(x) \\ G_{a,b,c} & \mapsto & g(a,b,c) \\ D_{a,b,c} & \mapsto & d(a,b,c) \end{array}$$

Il est alors clair que f_n s'annule sur l'idéal engendré par les $bac - G_{a,b,c}a - aD_{a,b,c}$ et donc le morphisme passe au quotient, d'où un morphisme :

$$\Omega^{n+1}(A) = \Omega^n(A)[\{G_{a,b,c}, D_{a,b,c}\}]/(bac - G_{a,b,c}a - aD_{a,b,c}) \xrightarrow{\varphi_{n+1}} B$$

et si $x \in \Omega^n(A)$ alors $\varphi_{n+1}(\iota_n(x)) = f_n(x) = \varphi_n(x)$, d'où le résultat. □

Remarque 54. *Si A est onirique, alors il y a un morphisme injectif (il admet un inverse à gauche) de A dans $\hat{\Omega}(A)$, mais il n'y a aucune raison a priori que ces deux anneaux oniriques soient isomorphes.*

Remarque 55. *Cela ne fonctionne pas avec les anneaux fadéliens, car si on a un morphisme non injectif, il n'y a pas de moyen d'affecter une image convenable aux indéterminées $G_{x,a}, D_{x,a}$ quand a est d'image nulle.*

5.3 Un cas concret où cela fonctionne

Lemme 56. *Soit un anneau A fadélien et B une partie de A. Il existe un sous-anneau fadélien de A contenant B et de cardinal inférieur à $\kappa = \max(\aleph_0, |B|)$.*

Preuve. Construisons une suite croissante B_i de sous-anneaux de A de cardinal $|B_i| \leq \kappa$ contenant B de la façon suivante :

— B_0 est le sous-anneau de A engendré par B. Il est de cardinal $\leq \kappa$ puisque l'ensemble des mots (finis) sur l'alphabet formé des éléments de B et de $+, \times$ est de cardinal $\leq \kappa$ (c'est une union sur $n \in \mathbb{N}$ d'ensembles de cardinal $(|B| + 2)^n \leq \kappa$) et que B_0 s'injecte aisément dans l'ensemble des tels mots par construction.

— Supposons B_n construit, et qu'il s'agisse d'un sous-anneau de A contenant B de cardinal $\leq \kappa$. Pour chaque couple $(x, a) \in B_n^2$ avec $a \neq 0$, soit un couple $(b_n(a, x), c_n(a, x)) \in A^2$ tel que $x = ab_n(a, x) + c_n(a, x)a$ (il en existe par fadélianité de A). Alors on note B_{n+1} le sous-anneau de A engendré par les éléments de B_n et les $(b_n(a, x), c_n(a, x))_{(x,a)\in B_n^2, a\neq 0}$. L'ensemble B_{n+1} est un sous-anneau de A contenant B, et il est de cardinal $\leq \kappa$ pour des raisons similaires à B_0.

On note alors $B_\infty = \bigcup_{n\geq 0} B_n$ (limite inductive d'anneaux). Il s'agit d'un sous-anneau de A contenant B, de cardinal $\leq \kappa$ comme union dénombrable d'ensembles de cardinal $\leq \kappa$. Il est par ailleurs fadélien puisque si $a, x \in B_\infty$ (avec $a \neq 0$) alors pour n assez grand on a $a, x \in B_n$ et par construction on peut écrire $x = ab_n(a, x) + c_n(a, x)a$ dans B_{n+1} et donc dans B_∞. □

Ici, tout marche parce qu'au lieu de rajouter des éléments formels, on va les chercher dans un anneau "externe" dont on sait qu'il est fadélien.

6 Algèbres

6.1 Polynômes

6.1.1 Cas général des anneaux simples sans diviseurs de zéro

Dans le cas non-commutatif, il est compliqué de définir une bonne notion de polynômes. On s'intéresse ici à l'algèbre $A[X]$ des polynômes formels à coefficients dans A où l'indéterminée X commute avec tout élément de A (c'est une construction très différente de celle qu'on a utilisée pour la deuxième condition suffisante de fadélianité, où l'indéterminée ne commutait pas avec les éléments de A). Les éléments de $A[X]$ sont de la forme $\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_i \in A$, et le produit est donné par la « convolution » usuelle des coefficients (c'est-à-dire que $X^i X^j = X^{i+j}$, et qu'on a la distributivité).

Pour simplifier les choses, on ne se placera dans la suite que dans le cas où l'anneau A est simple (donc son centre k est un corps) et sans diviseurs de zéro. On définit sans problèmes les notions de degré, de coefficient dominant, de polynômes unitaires, etc.

Fait 57. *L'ensemble $A[X]$ est une k-algèbre, dans laquelle A se plonge canoniquement par l'injection*

$$a \in A \mapsto aX^0$$

désormais considérée comme une inclusion (c'est une injection car A est simple et $A[X]$ est non nul).

Fait 58. *Pour tous $P, Q \in A[X]$, on a $\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$ et, puisque A est supposé sans diviseurs de zéro, $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.*

De la formule donnant le degré d'un produit, on déduit par ailleurs immédiatement que $A[X]$ est sans diviseurs de zéro.

Fait 59. *Soit k le centre de A. Alors, $k[X]$ s'injecte canoniquement dans $A[X]$ et ses éléments commutent avec tout polynôme de $A[X]$. Réciproquement, tout élément central de $A[X]$ est dans $k[X]$.*

Fait 60. *Soit $x \in k$. Alors l'application*

$$\phi_x : P = \sum a_i X^i \in A[X] \mapsto \sum a_i x^i \in A$$

est un morphisme d'anneaux. On notera $\phi_x(P) = P(x)$.

Définition 61. *Lorsque $P \in A[X]$ et $Q \in k[X]$, la notion de divisibilité n'est pas ambiguë : on dit que $Q \mid P$ lorsqu'il existe $R \in A[X]$ tel que $P = RQ = QR$. On dit que $P \in A[X]$ est sans diviseurs centraux si $(Q \in k[X] \wedge Q \mid P) \Rightarrow Q \in k$.*

Proposition 62. *Tout polynôme $P \in A[X]$ non nul se met uniquement sous la forme $P = P_\triangle P_\triangledown$ avec $P_\triangle \in k[X]$ unitaire et $P_\triangledown$ sans diviseurs centraux.*

Preuve. On pose $div(P)$ l'ensemble des $Q \in k[X]$ unitaires divisant P. Cet ensemble admet un élément $P_\triangle$ maximal pour la relation de divisibilité. On écrit $P = P_\triangle P_\triangledown$. Ainsi, si $Q \in k[X]$ divise $P_\triangledown$, alors $(dom(Q))^{-1} P_\triangle Q \in div(P)$, ce qui contredit la maximalité de $P_\triangle$ lorsque $\deg(Q) > 0$. Le polynôme $P_\triangledown$ est donc sans diviseurs centraux.

Pour l'unicité, écrire $P_1 P_2 = P_3 P_4$ avec $P_1, P_3 \in k[X]$ et P_2, P_4 sans diviseurs centraux. On pose $d = pgcd_{k[X]}(P_1, P_3)$ et $P_1 = dp_1$, $P_3 = dp_3$. Puisqu'il n'y a pas de diviseurs de zéro dans $A[X]$, on peut alors écrire $p_1 P_2 = p_3 P_4$ avec de plus p_1, p_3 premiers entre eux. On écrit $p_1 u + p_3 v = 1$ (en utilisant le théorème de Bézout dans $k[X]$) et alors $p_3 \mid u p_1 P_2 = (1 - p_3 v) P_2$ donc $p_3 \mid P_2$ d'où $\deg(p_3) \leq 0$ puisque P_2 est sans diviseurs centraux. On déduit de même que $\deg(p_1) \leq 0$, ce qui signifie que $p_1 = p_3 = 1$ (car ils sont unitaires), d'où $P_1 = P_3 = d$, et alors $P_2 = P_4$. □

Proposition 63. *Soit $P \in A[X]$ et $Q \in k[X]$. Alors $Q \mid P$ si et seulement si $Q \mid P_\triangle$ dans $k[X]$.*

Preuve. Montrons le sens direct, l'autre implication étant triviale. Supposons $Q \mid P$. Alors $P = QR = (QR_\triangle)(R_\triangledown)$. De l'unicité de la décomposition, on déduit $P_\triangle = (dom(Q))^{-1} Q R_\triangle$ d'où $Q \mid P_\triangle$. □

On a la « division euclidienne » suivante :

Propriété 64. *Pour tous polynômes $B, C \in A[X]$ avec $C \neq 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$, $P_1, \ldots, P_n, Q_1, \ldots, Q_n, R \in A[X]$ tels que $\deg(R) < \deg(C)$ et que :*

$$B = \sum_{i=1}^{n} P_i C Q_i + R$$

Preuve. On prouve le résultat par récurrence forte sur le degré de B.

— Si $\deg(B) < \deg(C)$, il suffit de prendre $n = 0$ et $R = B$.

— Sinon, on pose $b = dom(B)$, $c = dom(C)$ et on écrit par simplicité $b = \sum_{i=1}^{r} p_i c q_i$. On remarque alors que $B - (\sum_{i=1}^{r} p_i C q_i) X^{\deg(B)-\deg(C)}$ est de degré strictement inférieur à $\deg(B)$ (les termes en $X^{\deg(B)}$ s'annulent) et s'écrit donc, par hypothèse de récurrence, $\sum_{i=1}^{r'} \tilde{P}_i C \tilde{Q}_i + R$ avec $\deg(R) < \deg(C)$. On peut alors écrire :

$$B = \sum_{i=1}^{r'} \tilde{P}_i C \tilde{Q}_i + \sum_{i=1}^{r} (X^{\deg(B)-\deg(C)} p_i) C q_i + R$$

qui est de la forme souhaitée.

□

Proposition 65. *Soit un polynôme $P \in A[X]$ non nul (on rappelle que A est supposé simple et sans diviseurs de zéro).*

Alors, si $x \in k$ vérifie $P(x) = 0$, $(X - x)$ divise P (et donc P_Δ). En particulier, $Rac_k(P) = \{x \in k \mid P(x) = 0\}$ est fini de cardinal majoré par $\deg(P_\Delta) \leq \deg(P)$.

Si par ailleurs k est algébriquement clos, alors $P_\Delta = \prod_{\xi \in Rac_k(P)} (X - \xi)$.

Preuve. On écrit $P = \sum_{i=0}^{n} P_i (X - x) Q_i + R = Q(X - x) + R$ où $Q = \sum_{i=0}^{n} P_i Q_i$ et $\deg(R) \leq 0$. Alors $0 = P(x) = Q(x)(x - x) + R(x) = R(x)$ donc $R(x) = 0$. R étant un scalaire, $R = 0$ et donc $X - x \mid P$ d'où $X - x \mid P_\Delta$.

On sait $P(x) = 0 \Leftrightarrow P_\Delta(x) = 0$, c'est-à-dire que $Rac(P_\Delta) = Rac_k(P)$.

Si k est algébriquement clos, $P_\Delta = \prod_{\xi \in Rac(P_\Delta)} (X - \xi) = \prod_{\xi \in Rac_k(P)} (X - \xi)$. □

Proposition 66. *On a toujours $P_\Delta Q_\Delta \mid (PQ)_\Delta$. Quand k est algébriquement clos, on a $(PQ)_\Delta = P_\Delta Q_\Delta$.*

Preuve. De $P_\Delta \mid P$ et $Q_\Delta \mid Q$ on déduit $P_\Delta Q_\Delta \mid PQ$ d'où $P_\Delta Q_\Delta \mid (PQ)_\Delta$.

Supposons désormais k algébriquement clos et montrons $(PQ)_\Delta \mid P_\Delta Q_\Delta$. Soit $\lambda \in k$ tel que $(PQ)_\Delta(\lambda) = 0$. On veut montrer que $P_\Delta(\lambda) = 0$ ou $Q_\Delta(\lambda) = 0$. On sait que $PQ(\lambda) = 0$, d'où $P(\lambda) = 0$ ou $Q(\lambda) = 0$, ce qui montre le résultat. □

(Attention, dans $\mathbb{H}$, on a $(X - i)(X + i) = X^2 + 1$: on a ici un produit de polynômes sans diviseurs centraux qui est lui-même central, ce qui provient du fait que $\mathbb{R}$ n'est pas algébriquement clos)

Théorème 67. *Les idéaux bilatères de $A[X]$ sont tous de la forme $PA[X]$ avec $P \in k[X]$ unitaire.*

Preuve. Soit $I \neq 0$ un idéal bilatère de $A[X]$.

On choisit $\tilde{P} \in I$ de degré minimal parmi les polynômes non nuls de I. On écrit $\tilde{P} = \sum_{i=0}^{n} \tilde{p}_i X^i$ avec $\tilde{p}_n \neq 0$. Par simplicité de A, on peut écrire $1 = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \tilde{p}_n \mu_i$, et alors $P = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \tilde{P} \mu_i$ est un polynôme unitaire, de même degré que $\tilde{P}$ (et donc de degré minimal), et appartenant à I.

— Montrons $P \in k[X]$. Si ce n'est pas le cas, écrivons $P = \sum p_i X^i$ et posons $j = \max\{i \mid p_i \notin k\}$. Puisque P est unitaire, on sait que $j < \deg(P)$. Soit alors b tel que $p_j b \neq b p_j$. Alors pour $i > j p_i b - b p_i = 0$ et $p_j b - b p_j \neq 0$ donc $Pb - bP$ est un polynôme non nul de degré $j < \deg(P)$, et appartenant à I, ce qui contredit la minimalité du degré de P. Ainsi $P \in k[X]$.

— Soit $Q \in I$ quelconque, on écrit alors :

$$Q = \tilde{Q} P + R$$

Avec $\deg(R) < \deg(P)$. Puisque $R = Q - \tilde{Q}P \in I$ est de degré strictement inférieur à $\deg(P)$, $R = 0$ par définition de P. Donc $Q = \tilde{Q}P$. Ainsi $I \subset A[X]P \subset I$ d'où l'égalité.

$\square$

Remarque 68. *Soit $P, Q \in k[X]$ unitaires tels que $PA[X] = QA[X]$. Alors $P = Q$.*

En effet, $P = \tilde{P}Q = \tilde{P}\tilde{Q}P$ soit $\tilde{P}\tilde{Q} = 1$. Les polynômes $\tilde{P}$ et $\tilde{Q}$ étant unitaires, il faut donc $\tilde{P} = \tilde{Q} = 1$, soit $P = Q$.

Théorème 69. *Pour tout $P \in A[X]$, P_Δ vérifie $I(P) = P_\Delta A[X]$, et c'est même l'unique polynôme unitaire $S \in k[X]$ vérifiant $I(P) = SA[X]$.*

Preuve. L'existence et l'unicité d'un $S \in k[X]$ unitaire telle que $I(P) = SA[X]$ est claire d'après ce qui précède.

De $P = P_\Delta P_\nabla$, on déduit $I(P) = P_\Delta I(P_\nabla) = SA[X]$ par définition. Il suffit de prouver que si Q est un polynôme sans diviseurs centraux, alors $A[X]$ est le seul idéal bilatère contenant Q. Cela montrera $I(P_\nabla) = A[X]$ d'où $P_\Delta A[X] = SA[X]$ d'où $P_\Delta = S$ par unicité du polynôme générateur.

Soit $Q \in A[X]$ sans diviseurs centraux et un idéal bilatère $I = UA[X]$ de $A[X]$ contenant Q. Alors $U \mid Q$ ce qui, par définition des polynômes sans diviseurs centraux, implique $\deg(U) \leq 0$, et puisque U est unitaire on a $U = 1$ soit $I = A[X]$. $\square$

6.1.2 Cas des anneaux fadéliens

Lorsque A est fadélien, on a la propriété suivante :

Propriété 70. *Soit A fadélien. Pour tous polynômes $B, C \in A[X]$ avec $C \neq 0$, il existe $Q_1, Q_2, R \in A[X]$ tels que $\deg(R) < \deg(C)$ et que :*

$$B = Q_1 C + C Q_2 + R$$

c'est-à-dire qu'on a une sorte de « division euclidienne fadélienne »

Preuve. On prouve le résultat par récurrence forte sur le degré de B.

- Si $\deg(B) < \deg(C)$, il suffit de prendre $Q_1 = Q_2 = 0$ et $R = B$.
- Sinon, on pose $b = dom(B)$, $c = dom(C)$ et on écrit par fadélianité $b = ec + cf$. On remarque alors que $B - (eC - Cf)X^{\deg(B)-\deg(C)}$ est de degré strictement inférieur à $\deg(B)$ (les termes en $X^{\deg(B)}$ s'annulent) et s'écrit donc, par hypothèse de récurrence, $Q_1 C + C Q_2 + R$ avec $\deg(R) < \deg(C)$. On peut alors écrire :

$$B = (Q_1 + eX^{\deg(B)-\deg(C)})C + C(Q_2 + X^{\deg(B)-\deg(C)}f) + R$$

qui est de la forme souhaitée.

$\square$

Définition 71. *Soit $P \in A[X]$. On dit que P est un polynôme onirique lorsque $A[X]P + PA[X]$ est un idéal bilatère de $A[X]$ (c'est alors $I(P)$), c'est-à-dire que $A[X]PA[X] \subset A[X]P + PA[X]$.*

Par exemple, tout polynôme de $k[X]$ est onirique.

Cette définition est motivée par la propriété suivante :

Propriété 72. *Soit un anneau A (simple, sans diviseurs de zéro). Alors il y a équivalence entre :*

1. *A est fadélien*
2. *Tout monôme de $A[X]$ (de la forme $aX^j, a \in A, j \in \mathbb{N}$) est onirique*
3. *Tout polynôme constant de $A[X]$ est onirique*
4. *$A[X]$ vérifie la propriété de division euclidienne fadélienne précédente*

Preuve.

— $1 \Rightarrow 2$ **:** Supposons A fadélien. Soit $a \in A$ et $j \in \mathbb{N}$. Il suffit de montrer que pour tous $\lambda, \mu \in A$ et tous $i, k \in \mathbb{N}$, $(\lambda X^i)aX^j(\mu X^k)$ s'écrit $PaX^j + aX^jQ$. Par fadélianité, écrivons $\lambda a\mu = \tilde{\lambda} a + a\tilde{\mu}$. Alors :

$$(\lambda X^i)aX^j(\mu X^k) = (\tilde{\lambda}a + a\tilde{\mu})X^{i+j+l} = (\tilde{\lambda}X^{i+k})aX^j + aX^j(\tilde{\mu}X^{i+k})$$

— $2 \Rightarrow 3$ **:** immédiat

— $3 \Rightarrow 1$ **:** Supposons tout polynôme constant de $A[X]$ onirique. Soit $a \in A$. Il faut montrer $AaA \subset Aa + aA$. Soit $\lambda, \mu \in A$. On sait que $\lambda a \mu = Pa + aQ$, avec $P, Q \in A[X]$ car a est onirique. Évaluons ces polynômes en $0 \in k$. On obtient : $\lambda a \mu = P(0)a + aQ(0)$, d'où le résultat.

— $1 \Rightarrow 4$ **:** Connu.

— $4 \Rightarrow 1$ **:** Clair (regarder pour les constantes puis évaluer en 0).

□

Proposition 73. *Un polynôme P est onirique si et seulement si P_∇ est onirique, c'est-à-dire que $A[X]P_\nabla + P_\nabla A[X] = A[X]$.*

Preuve. Ceci résulte simplement de cette équivalence :

$$QPR = SP + PT \Leftrightarrow P_\Delta(QP_\nabla R = SP_\nabla + P_\nabla T) \Leftrightarrow QP_\nabla R = SP_\nabla + P_\nabla T$$

Ainsi $A[X]PA[X] \subset A[X]P + PA[X] \Leftrightarrow A[X]P_\nabla A[X] \subset A[X]P_\nabla + P_\nabla A[X]$ d'où le résultat. On sait que $I(P_\nabla) = A[X]$, d'où la reformulation finale. □

Proposition 74 (À VÉRIFIER)**.** *Soit $x \in A$ et $a \in A \setminus k$. Alors il y a équivalence entre :*

— *Il existe $N \in \mathbb{N}$ et $(p_i)_{i \le N}$ tels que $x = \sum_{i=0}^{N} a^i(p_i a - a p_i)$*

— *Il existe $N \in \mathbb{N}$ et $(q_i)_{i \le N}$ tels que $x = \sum_{i=0}^{N} (a q_i - q_i a)a^i$*

— *Il existe $P, Q \in A[X]$ tels que $x = P(X-a) + (X-a)Q$*

Dans ce cas, on a $P = \sum p_i X^i$ et $Q = \sum q_i X^i$ avec :

$$q_i = \sum_{j=0}^{N-i-1} a^j p_{i+1+j} a - \sum_{j=0}^{N-i} a^j p_{i+j}$$

Preuve. Le sens direct résulte d'un calcul pénible, en utilisant la formule.

Le sens réciproque s'obtient en exprimant les relations entre p_i et q_i, qui finissent par donner la formule de q_i, et en regardant ce que cela implique pour le terme constant. □

Corollaire 75. *Soit $a \notin k$ et $P \in A[X]$. Alors $P \in A[X](X-a) + (X-a)A[X]$ équivaut à ce que dans la division euclidienne fadélienne de P par $X - a$, le reste vérifie la propriété précédente.*

Il est immédiat que $X - a$ est sans diviseurs centraux. Le polynôme $X - a$ est donc onirique si et seulement si toute constante x vérifie la propriété.

On remarque que $k[X]$ est une partie multiplicative et centrale de $A[X]$, on peut donc toujours localiser $A[X]$ par $k[X] \setminus \{0\}$. On note alors $\partial A = A[X]_{k[X]\setminus\{0\}}$. Il est facile de vérifier que (lorsque A est simple, sans diviseurs de zéro), ∂A est simple, sans diviseurs de zéro, de centre $k(X)$. De plus $\partial^n A$ est égal à la localisation de $A[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ (avec les indéterminées qui commutent entre elles et avec les éléments de A, c'est à dire $A[X_1][X_2]\ldots[X_n]$) par sa partie multiplicative et centrale $k[X_1, X_2, \ldots, X_n] \setminus \{0\}$.

Proposition 76. *Il y a équivalence entre les propriétés suivantes lorsque k est algébriquement clos (lorsque k n'est pas algébriquement clos, on n'a que le sens direct) :*

— *Tout polynôme de $A[X]$ est onirique.*

— *∂A est fadélien.*

Preuve. Remarquons que pour tout $x \in \partial A$, il existe $x_\Delta \in k(X)$ et $x_\nabla \in A[X]$ sans diviseurs centraux tel que $x = x_\Delta x_\nabla$ (il suffit d'écrire $\frac{P}{Q} = \frac{P_\Delta}{Q} P_\nabla$).

Supposons dans un premier temps que tout polynôme de $A[X]$ est onirique. Soit $x, a \in \partial A$, tous deux non nuls. On veut montrer qu'il existe $b, c \in \partial A$ tels que $x = ba + ac$.

Par hypothèse, a_∇ est onirique, et donc $A[X]a_\nabla + a_\nabla A[X] = A[X]$. On peut donc écrire $x_\nabla = Q_1 a_\nabla + a_\nabla Q_2$, puis :

$$x = x_\Delta x_\nabla = (Q_1 x_\Delta) a_\nabla + a_\nabla (x_\Delta Q_2) = (Q_1 x_\Delta a_\Delta^{-1}) a + a(a_\Delta^{-1} x_\Delta Q_2)$$

qui est de la forme désirée.

Réciproquement, supposons ∂A fadélien. Soit $B \in A[X]$ sans diviseurs centraux, montrons $A[X]B + BA[X] = A[X]$. Soit donc $C \in A[X]$. Par hypothèse, il existe $P_1, P_2 \in A[X]$ et $Q_1, Q_2 \in k[X] \setminus \{0\}$ tels que $(Q_2 P_1)B + B(Q_1 P_2) = Q_1 Q_2 C$, qu'on peut choisir tels que $(P_1)_\Delta \wedge Q_1 = 1$, $(P_2)_\Delta \wedge Q_2 = 1$, $Q_1 \wedge Q_2 = 1$ et tels que Q_1 et Q_2 soient unitaires.

Remarquons que cela implique $Q_1 \mid Q_2 P_1 B$. Donc $Q_1 \mid (Q_2 P_1 B)_\Delta = Q_2 (P_1)_\Delta B_\Delta$ (on a utilisé le fait que k est algébriquement clos). Puisque $(P_1)_\Delta \wedge Q_1 = 1$ et $Q_2 \wedge Q_1 = 1$, on a donc $Q_1 \mid B_\Delta$. B étant sans diviseurs centraux, on a donc $Q_1 = 1$. On montre de même que $Q_2 = 1$ et alors $P_1 B + B P_2 = C$, ce qui donne le résultat désiré. □

Si on ne sait pas que k est algébriquement clos, on a tout de même :

Proposition 77. *Si ∂A est fadélien, alors A est fadélien.*

Preuve. Supposons ∂A fadélien. Il suffit de montrer que les $a \in A$ sont des polynômes oniriques de $A[X]$. Si $a \in k$, cela est clair, sinon a est sans diviseurs centraux. Essayons de reprendre la preuve précédente (avec $B = a \in A$) : on était arrivé à $Q_1 \mid Q_2 P_1 a$. De $Q_1 \wedge Q_2 = 1$, on déduit sans problème (en utilisant Bézout dans $k[X]$) que $Q_1 \mid P_1 a$. On écrit donc $P_1 a = Q_1 W$.

Écrivons $P_1 = Q_1 \tilde{P} + R$, avec $\deg(R) < \deg(Q_1)$, par division euclidienne. Alors $Q_1 W = P_1 a = Q_1 \tilde{P} a + Ra$. Ainsi, $Ra = Q_1(W - \tilde{P}a)$ et donc $Q_1 \mid Ra$, d'où $Q_1 \mid (Ra)_\Delta$. On sait par ailleurs que $\deg((Ra)_\Delta) \leq \deg(Ra) = \deg(R) < \deg(Q_1)$. La relation de divisibilité implique donc $Ra = 0$ d'où $R = 0$. On en conclut que $P_1 = Q_1 \tilde{P}$ soit $Q_1 \mid (P_1)_\Delta$. Puisque $(P_1)_\Delta \wedge Q_1 = 1$, on a donc $Q_1 = 1$ et de même on montre $Q_2 = 1$, ce qui permet de reprendre la preuve comme précédemment. □

Remarque 78. *On a montré plus généralement que, dans un anneau A (simple, sans diviseurs de zéro, de centre k), si $P, Q \in k[X]$, $a \in A$, et $Q \mid Pa$ alors $Q \mid P$, c'est-à-dire que $(AB)_\Delta = A_\Delta B_\Delta$ est vrai lorsque* $\min(\deg(A_\nabla), \deg(B_\nabla)) \leq 0$.

6.2 Séries formelles

De même que les polynômes, on définit l'algèbre $A[[X]]$ des séries formelles, avec :

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n X^n\right) = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}\right) X^n\right)$$

On a toujours les propriétés d'associativité, de simplicité, d'absence de diviseurs de zéro. On n'a pas en général de morphismes d'évaluations, à l'exception de $\phi_0 : P \mapsto P(0)$, défini par $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n\right)(0) = a_0$.

On a la propriété suivante :

Proposition 79. *Si A est fadélien et $B, C \in A[[X]]$ avec $C(0) \neq 0$, alors on peut écrire :*

$$B = Q_1 C + C Q_2$$

Preuve. Posons $B = \sum_n b_n X^n$ et $C = \sum_n c_n X^n$, avec $c_0 \neq 0$. On cherche $Q_1 = \sum q_n^1 X^n$ et $Q_2 = \sum q_n^2 X^n$.

La relation $B = Q_1 C + C Q_2$ impose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n = \sum_{k=0}^{n} q_k^1 c_{n-k} + c_{n-k} q_k^2$$

On remarque que pour un n fixé, cela ne pose une contrainte que sur les q_i^1, q_i^2 pour $i \leq n$.

Par fadélianité, puisque $c_0 \neq 0$, on commence par écrire :

$$b_0 = q_0^1 c_0 + c_0 q_0^2$$

Supposons qu'on ait construit q_i^1, q_i^2, pour $i < N$, tels que la condition sur b_n soit vraie pour $n < N$. La condition sur b_N demande alors :

$$b_N - \sum_{k=0}^{N-1} q_k^1 c_{n-k} + c_{n-k} q_k^2 = q_N^1 c_0 + c_0 q_N^2$$

Les seuls éléments à déterminer dans cette expression sont q_N^1 et q_N^2, qu'on peut choisir tels que la relation soit vraie par fadélianité, puisque $c_0 \neq 0$. On construit ainsi les suites q^1 et q^2 par récurrence, et alors :

$$B = (\sum q_n^1 X^n) C + C(\sum q_n^2 X^n)$$

□

On montre d'une manière similaire que C est inversible dans $A[[X]]$ si et seulement si $C(0)$ est inversible dans A.

De ces propriétés, on déduit que les idéaux bilatères non nuls de $A[[X]]$ sont exactement les $X^i A[[X]]$ avec $i \in \mathbb{N}$ et que tout élément de $A[[X]]$ est onirique. Si on quotiente $A[[X]]$ par son unique idéal maximal $XA[[X]]$, on obtient donc un anneau fadélien, hélas isomorphe à A. En revanche, la localisation suivante est plus intéressante :

Définition 80. *Définissons $M(A) = \{X^j Q \mid j \in \mathbb{Z}, Q \in A[[X]], Q(0) \neq 0\}$ avec le produit $(X^i Q_1)(X^j Q_2) = X^{i+j}(Q_1 Q_2)$ (la notation $M(A)$ est justifiée par une analogie avec les fonctions méromorphes).*

Proposition 81. *A est fadélien si et seulement si $M(A)$ l'est.*

Preuve. Si $M(A)$ est fadélien, soit $x, a \in A$ avec $a \neq 0$ et $X^i Q_1, X^j Q_2 \in M(A)$ tels que $x = X^i Q_1 a + a X^j Q_2$. Alors, on peut changer i, j pour qu'ils soient positifs en introduisant $r \geq 0$ tel que $xX^r = Q_1 X^i a + a Q_2 X^j$ dans $A[[X]]$. Quitte à simplifier par le minimum des trois puissances, l'une des trois est nulle. Si c'est r, alors $x = X^i Q_1 a + a X^j Q_2$ et en évaluant en 0 on obtient $x \in Aa + aA$, on suppose donc $r \neq 0$.

Sinon, c'est soit i soit j qui est nul. Supposons par exemple que c'est j, on a donc $xX^r = Q_1 X^i a + a Q_2$. En évaluant en 0, puisque $aQ_2(0) \neq 0$ et $r \neq 0$, on sait que $Q_1(0) 0^i a$ est non nul. Ainsi $i = 0$. On écrit ainsi : $xX^r = Q_1 a + a Q_2$. On a en zéro l'égalité $0 = Q_1(0) a + a Q_2(0)$ et donc $xX^r = (Q_1 - Q_1(0)) a + a(Q_2 - Q_2(0))$. Puisque $(Q_1 - Q_1(0))(0) = 0$, il existe Q_1^1 tel que $Q_1 - Q_1(0) = XQ_1^1$ et de même $Q_2 - Q_2(0) = XQ_2^1$. On se retrouve ainsi avec $xX^{r-1} = Q_1^1 a + a Q_2^1$. En itérant, on arrive à $x = Q_1^r a + a Q_2^r$ d'où, en évaluant en 0, $x \in Aa + aA$.

Supposons désormais A fadélien. Soit $X^i B$ et $X^j C \neq 0$ (avec $C(0) \neq 0$) dans $M(A)$. On écrit, d'après la proposition précédente,

$$B = Q_1 C + C Q_2$$

Et alors $X^i B = X^i Q_1 C + C X^i Q_2 = (X^{i-j} Q_1) X^j C + X^j C (X^{i-j} Q_2)$, ce qui prouve que $M(A)$ est fadélien. □

6.3 Exemple d'anneau fadélien ne vérifiant pas la propriété d'Ore

Lemme 82. *Si A est un anneau fadélien non nœthérien dénombrable, alors $M(A)$ est fadélien et n'est pas d'*Ore.

Preuve. Il est connu que $M(A)$ est fadélien. Examinons donc la condition d'Ore. On ne s'intéressera ici qu'aux idéaux à droite, tout étant évidemment également vrai pour les idéaux à gauche.

Notons $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les éléments de A, avec $a_0 = 0$. Soit $\tilde{I}_n$ une suite strictement croissante d'idéaux de A (qui existe par hypothèse), avec $\tilde{I}_0 = 0$. On choisit pour tout n un $b_n \in \tilde{I}_{n+1} \setminus \tilde{I}_n$ et on pose $I_n = b_0A + \ldots + b_nA \, (\subset \tilde{I}_{n+1})$.

Soit $n \geq 1$. Montrons qu'il existe c_n tel que $b_nc_na_n \notin I_{n-1}$. S'il n'existe pas de tel c_n, alors $b_nAa_n \subset I_{n-1}$ d'où $b_nAa_nA \subset I_{n-1}$ (car I_{n-1} est un idéal à droite). Par additivité de I_{n-1}, cela signifie $b_nI(a_n) \subset I_{n-1}$, où $I(a_n)$ est l'idéal bilatère engendré par $a_n \neq 0$, c'est-à-dire A par simplicité de A qui est fadélien. Ainsi $b_nA \subset I_{n-1}$ d'où $b_n \in I_{n-1}$ puis $b_n \in \tilde{I}_n$, ce qui contredit le choix de b_n. On fixe une telle famille de c_n.

Soit alors $J_n = \{x \in A \mid b_nc_nx \in I_{n-1}\}$, qui est un idéal à droite. Si $n \geq 1$, on sait que $a_n \notin J_n$ par construction, et donc $\bigcap_{n\geq 1} J_n = 0$.

Passons dans $M(A)$, on pose les deux éléments suivants :

$$S = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_nc_nX^n$$

$$\hat{S} = S + b_0c_0$$

Ces deux éléments sont non nuls, il nous suffit donc de montrer $SK = \hat{S}L \Rightarrow K = L = 0$ pour montrer que $M(A)$ n'est pas d'Ore. Supposons $SK = \hat{S}L$, avec $K = \sum k_nX^n$ et $L = \sum l_nX^n$ non nuls. Quitte à multiplier par une puissance de X convenable, on peut supposer que $k_n = l_n = 0$ pour $n < 0$ et que $k_0 \neq 0$ ou $l_0 \neq 0$.

L'égalité des coefficients constants donne :

$$b_0c_0k_0 = 2b_0c_0l_0$$

d'où (puisqu'il n'y a pas de diviseurs de zéro) $k_0 = 2l_0$.

L'égalité des coefficients en X^i donne :

$$b_ic_ik_0 + \sum_{n=1}^{i-1} b_{i-n}c_{i-n}k_n + b_0c_0k_i = b_ic_il_0 + \sum_{n=1}^{i-1} b_{i-n}c_{i-n}l_n + 2b_0c_0l_i$$

$$b_ic_il_0 = -\sum_{n=1}^{i-1} b_{i-n}c_{i-n}k_n + b_0c_0k_i \sum_{n=1}^{i-1} b_{i-n}c_{i-n}l_n + 2b_0c_0l_i$$

$$b_ic_il_0 \in b_0A + \ldots + b_{i-1}A = I_{i-1}$$

Ainsi $l_0 \in J_i$ pour tout $i \geq 1$ donc $l_0 \in \bigcap_{n\geq 1} J_n$ soit $l_0 = 0$ puis $k_0 = 0$, ce qui est absurde. Ainsi, $SM(A)$ et $\hat{S}M(A)$ sont bien deux idéaux non nuls d'intersection nulle et $M(A)$ n'est pas d'Ore. □

Le problème est que l'exemple non nœthérien obtenu précédemment n'était absolument pas dénombrable, il faut donc utiliser la construction d'un sous-anneau fadélien dénombrable qui résulte d'un lemme vu précédemment.

Théorème 83. *Il existe un anneau fadélien qui ne vérifie pas la condition d'*Ore.

Preuve. Il suffit, selon le lemme précédent, de montrer qu'il existe un anneau fadélien non nœthérien dénombrable. Pour cela, on repart de l'exemple $A_D^{\mathcal{U}}$ non nœthérien obtenu et on considère la partie suivante de $A_D^{\mathcal{U}}$: $B = \{a, e_0, e_1, e_2, \ldots\}$, où :

— a est la projection de $(D, D, D, \ldots)$ dans $A_D^{\mathcal{U}}$

— e_n est la projection de $\hat{e}_n = (\underbrace{1_{A_D}, \ldots, 1_{A_D}}_{n \text{ coordonnées}}, D, D^2, D^3, \ldots)$ dans $A_D^{\mathcal{U}}$

($|B| = \aleph_0$ donc $\kappa = \aleph_0$ ici)

On obtient, par un lemme vu précédemment (dans la section « Complétion d'anneaux en anneaux fadéliens »), un sous-anneau B_∞ dénombrable fadélien de A contenant cette partie. La relation $e_n = e_{n+1}a$, valable dans $A_D^{\mathcal{U}}$, vaut toujours dans B_∞ et donc : $e_n B_\infty \subset e_{n+1} B_\infty$.

La suite $(e_n B_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ d'idéaux de B_∞ est en fait strictement croissante, puisque si $e_{n+1} \in e_n B_\infty$, alors $e_{n+1} \in e_n A_D^{\mathcal{U}}$, ce qui est faux comme on l'a vu précédemment. Ainsi, B_∞ est un anneau fadélien dénombrable non nœthérien. Cela achève la démonstration du théorème. □

Puisque, contrairement à la (non-)nœthérianité, la condition d'Ore est du premier ordre, on n'a aucun mal étant donné ce théorème à en conclure l'existence d'un anneau fadélien dénombrable ne satisfaisant pas la condition d'Ore, en utilisant le théorème de Löwenheim-Skolem.

7 Idées sans applications jusqu'ici

[À PARTIR DE CE POINT, LE DOCUMENT NE CONTIENT PLUS QUE DES PISTES ET AUCUN RÉSULTAT UTILE]

7.1 Théorèmes en vrac

Les théorèmes qui suivent tentent d'obtenir des résultats sur les anneaux faiblement fadéliens qui les rapprochent des anneaux fadéliens.

Lemme 84. *Soit A faiblement fadélien, $a, b, d \in A$ non nuls.*
Si $aA + Ad = abA + Ad$ alors $bA + Ad = A$.

Preuve. Soit $x \in A$. $ax \in aA + Ad$ donc on peut écrire $ax = abx' + y'd$.
Écrivons $1 = \alpha a + b\beta$ par faible fadélianité, alors :

$$x = \alpha a x + b\beta x = \alpha a b x' + \alpha y' d + b\beta x = bx' - b\beta b x' + \alpha y' d + b\beta x \in bA + Ad$$

□

Théorème 85. *Soit A faiblement fadélien, $a, b, d \in A$ non nuls.*
Alors :

$$abA + Ad = A \Leftrightarrow aA + Ad = bA + Ad = A$$

Autrement dit, pour tout d non nul, l'ensemble des a tels que $aA + Ad = A$ est multiplicatif et "premier" (au sens où son complémentaire est absorbant).

Preuve.
- Si $abA + Ad = A$, alors $aA + Ad = A$ et le lemme précédent permet de conclure que $bA + Ad = A$.
- Il est clair que $abA + Ad = a(bA + Ad) + Ad$. Si $aA + Ad = bA + Ad = A$, on a donc $abA + Ad = aA + Ad = A$.

□

On peut légèrement améliorer ces résultats par celui-ci :

Théorème 86. *Soit A faiblement fadélien, $a, b, c, d \in A$ non nuls.*
Alors :

$$abA + Ad = acA + Ad \Leftrightarrow bA + Ad = cA + Ad$$

Preuve. Essentiellement la même que celle du lemme précédent(laissée en exercice ?). On remarque que pour $c = 1$, on retrouve ledit lemme. □

7.2 Étude des idéaux unilatères (2)

7.2.1 $G(X)$ et $D(X)$

Soit un anneau A sans diviseurs de zéro. Si $X \subset A$, on note :

$$G(X) = \{g \in A \mid \forall a \in A, ga \in X \Leftrightarrow a \in X\}$$
$$D(X) = \{d \in A \mid \forall a \in A, ad \in X \Leftrightarrow a \in X\}$$

On a les égalités suivantes : $G(A) = D(A) = A$, $G(0) = D(0) = G(A \setminus \{0\}) = D(A \setminus \{0\}) = A \setminus \{0\}$, $G(A^\times) = D(A^\times) = G(A \backslash A^\times) = D(A \backslash A^\times) = A^\times$. De plus $0 \in G(X) \Leftrightarrow 0 \in D(X) \Leftrightarrow (X = A) \vee (X = \emptyset)$.

Propriété 87. *Les ensembles $G(X)$ et $D(X)$ sont des parties multiplicatives.*

Preuve. Considérons par exemple le cas de $D(X)$. On a toujours $1 \in D(X)$. De plus, si $d, d' \in D(X)$, alors :

$$add' \in X \Leftrightarrow ad \in X \Leftrightarrow a \in X$$

donc $dd' \in D(X)$, ce qui prouve le résultat. □

Propriété 88. *Si I est un idéal à droite alors $A^\times \subset D(I)$. De plus, si $I \neq A$, alors $G(I)$ et $D(I)$ sont inclus dans $A \setminus I$.*

On a un énoncé symétrique pour les idéaux à gauche.

Preuve. Soit $x \in A^\times$, $a \in A$. Alors :

$$ax \in I \Rightarrow axx^{-1} \in I \Rightarrow a \in I$$

$$a \in I \Rightarrow ax \in I$$

Et donc $x \in D(I)$.

Supposons qu'il existe $d \in D(I) \cap I$. Alors $1d \in I$ et donc $1 \in I$, ce qui signifie que $I = A$. De même si $g \in G(I) \cap I$, alors $g1 \in I$ d'où $1 \in I$ soit $I = A$. □

Proposition 89. *Un idéal à droite $I \neq A$ vérifie $D(I) = A \backslash I$ si et seulement si $xy \in I \Rightarrow x \in I \vee y \in I$.*

Preuve. Si $D(I) = A \setminus I$, alors $A \setminus I$ est une partie multiplicative et donc on a bien le résultat.

Si $xy \in I \Rightarrow x \in I \vee y \in I$, montrons $A \setminus I \subset D(I)$. Soit $d \notin I$. Alors :

$$ad \in I \Rightarrow a \in I \vee d \in I \Rightarrow a \in I$$

$$a \in I \Rightarrow ad \in I$$

Ainsi $d \in D(I)$, ce qui prouve le résultat. □

7.2.2 Idéaux « turcs »

Définition 90. *Soit un idéal à droite I d'un anneau A. On dit que I est turc lorsqu'I vérifie l'une des deux propriétés suivantes :*

— $I = A \setminus A^\times$

— *Il existe un élément d non inversible tel que $\forall a \in A, a \in I \Leftrightarrow ad \in I$. C'est-à-dire que $D(I) \neq A^\times$.*

On définit similairement la notion pour les idéaux à gauche.

C'est une tentative d'adaptation du concept d'idéal premier (dans le cas commutatif, un idéal premier est turc).

Proposition 91. *Soit un anneau A simple sans diviseurs de zéro. Si $A \setminus A^\times$ est un idéal (par exemple à droite), alors A est une algèbre à division.*

Preuve. L'ensemble $A \setminus A^\times$ est absorbant à gauche et à droite quoi qu'il en soit, et le fait que ce soit un idéal d'un côté ne fait que le rendre additif : c'est alors un idéal bilatère ne contenant pas 1 et donc l'idéal nul, d'où $A^\times = A \setminus \{0\}$. □

Les résultats qui suivront seront parfaitement inutiles (et triviaux) dans le cas où l'anneau est une algèbre à division. Nous supposons donc que les anneaux considérés possèdent des éléments non inversibles, et un idéal à droite I est alors turc lorsque $D(I) \neq A^\times$.

Proposition 92. *Soit I un idéal à droite et $K_I(x) = \{k \in A \mid xk \in I\}$.*
Alors $\forall a \in A, a \in I \Leftrightarrow ad \in I$ est équivalent à $\forall x \in A, \forall a \in A, a \in K_I(x) \Leftrightarrow ad \in K_I(x)$.

Cela signifie que si on connaît un idéal turc, on peut potentiellement en obtenir d'autres.
Preuve. $K_I(1) = I$, donc l'implication $\Leftarrow$ est triviale. Montrons le sens direct : soit I vérifiant $\forall a \in A, a \in I \Leftrightarrow ad \in I$ et $x \in A$. Il suffit alors d'écrire :

$$a \in K_I(x) \Leftrightarrow xa \in I \Leftrightarrow xad \in I \Leftrightarrow ad \in K_I(x)$$

□

La notion d'idéaux turcs trouve son intérêt au regard de la propriété suivante :

Théorème 93. *Soit A faiblement fadélien et $x, y \in A$ non nuls. Si $I = xA + yA$ est turc, alors $xA \cap yA \neq 0$.*

Preuve. Supposons que $xA \cap yA = 0$.
Montrons d'abord que $I \neq A$, c'est-à-dire que $1 \notin I$. Si $1 = xk + yl$, alors $x = xkx + ylx$ soit $x(1 - kx) = ylx$. Par hypothèse, $xA \cap yA = 0$ donc $x(1 - kx) = 0$. On en déduit $kx = 1$ donc x est inversible, et donc $yA = yA \cap A = yA \cap xA = 0$ et donc $y = 0$, ce qui est absurde.
On utilise désormais le fait que I est turc. Il existe alors d non inversible et non nul (car $I \neq A$) tel que $ad \in I \Leftrightarrow a \in I$. On écrit alors $1 = xb + cd = yb' + c'd$. On en déduit $xb - yb' = (c' - c)d$. Puisque $xb - yb' \in I$, on déduit $c' - c \in I$ par définition de d. Ainsi $c' - c' = yk + xl$, soit : $xb - yb' = ykd + xld$, i.e. $x(b - ld) = y(kd + b')$. Par hypothèse, $xA \cap yA = 0$ et donc $x(b - ld) = 0$. Ainsi $xb = xld$, et donc $1 = xld + cd = (xl + c)d$. On en déduit que d est inversible, ce qui est absurde. □

Ainsi, si un anneau faiblement fadélien a tous ses idéaux de la forme $xA + yA$ turcs, il est d'Ore (et donc fadélien).
On pourrait se demander si la notion des idéaux turcs n'est pas trop large, et demander à ce qu'elle soit plus proche de la définition des idéaux premiers, i.e. que $xy \in I \Rightarrow x \in I \vee y \in I$, i.e. $D(I) = A \setminus I$. Nous avons cependant le résultat suivant, qui montre que cette condition est trop forte dans le cas faiblement fadélien :

Proposition 94. *Soit un idéal à droite $I \subsetneq A$ tel que : $D(I) = A \setminus I$, c'est-à-dire $xy \in I \Rightarrow (x \in I) \vee (y \in I)$.*
Alors :

1. *Pour tout $x \in A^\times$ et $y \in I$, $xy \in I$.*
2. *Si A est faiblement fadélien, alors $I = 0$.*

Preuve.

1. On a $y = x^{-1}xy \in I$ et $x^{-1} \notin I$ (sinon $1 = x^{-1}x \in I$ d'où $I = A$) et donc $xy \in I$.
2. En s'inspirant de 1. mais en remplaçant l'inversibilité par la propriété de fadélianité, on va montrer que I est un idéal bilatère. Puisqu'il est propre, il sera donc nul par simplicité de A.
   Soit $x \in A$ et $y \in I$, il faut montrer $xy \in I$. Si $xy = 0$, cela est clair, on peut donc supposer $x \neq 0$ et $y \neq 0$.
   On écrit $1 = ax + yb$. De $yb \in I$ et $1 \notin I$ (car $I \neq A$), on déduit $ax \notin I$ d'où $a \notin I$.

Par ailleurs, $y = 1y = axy + yby \in I$. De $y \in I$ et $yby \in I$, on déduit $axy \in I$. En utilisant la propriété $D(I) = A \setminus I$, on obtient $a \in I \vee xy \in I$. On a déjà montré $a \notin I$ et donc $xy \in I$.

L'idéal I est donc bilatère, ce qui conclut la preuve.

□

Dans un anneau faiblement fadélien, tout idéal à droite $I \notin \{0, A\}$ vérifie donc :

$$A^\times \subset D(I) \subsetneq A \setminus I$$

7.3 Dérivations

7.3.1 Définitions

Définition 95. *Soit un anneau A dont le centre est un corps k. Une dérivation sur A est une application $\mathcal{D} : A \mapsto A$ qui est k-linéaire et qui vérifie :*

$$\forall x, y \in A, \mathcal{D}(xy) = \mathcal{D}(x)y + x\mathcal{D}(y)$$

On notera plutôt x' pour $\mathcal{D}(x)$.

Exemple 96. *Voici des exemples de dérivations, dites canoniques :*

— *Sur $A[X]$ et sur $A[[X]]$:*

$$\left(\sum a_i X^i\right)' = \sum (i+1) a_{i+1} X^{i+1}$$

— *Sur ∂A :*

$$\left(\frac{P}{Q}\right)' = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}$$

où les dérivations des polynômes sont au sens précédent.

— *Sur $M(A)$:*

$$(X^i P)' = X^{i-1}(iP + XP')$$

où les dérivations des polynômes sont au sens précédent.

Dans tous ces exemples, on peut en outre vérifier que la dérivation proposée est l'unique dérivation vérifiant $X' = 1$.

7.3.2 Le cas de ∂A

Proposition 97. *Soit un anneau A simple et sans diviseurs de zéro dont le centre k est de caractéristique nulle, et ∂A muni de sa dérivation canonique.*

Alors, pour $x \in \partial A$:

$$x' = 0 \Leftrightarrow x \in A$$

Preuve. L'autre sens étant immédiat, montrons le sens direct. Il s'agit de montrer que si $P \in A[X], Q \in k[X] \setminus \{0\}$ vérifient $P'Q = PQ'$, alors $P \in AQ$.

Si $P = 0$, le résultat est clair, supposons donc $P \neq 0$. Puisque k est de caractéristique nulle, il est infini. Or $Rac_k(P) \cup Rac_k(Q)$ est fini, il existe donc $\lambda \in k$ tel que $P(\lambda) \neq 0$ et $Q(\lambda) \neq 0$. Il est facile de vérifier qu'alors on peut écrire (en faisant des divisions euclidiennes successives du quotient jusqu'à arriver au degré nul) :

$$P = \sum p_i (X - \lambda)^i$$

$$Q = \sum q_i (X - \lambda)^i$$

avec $\forall i, q_i \in k$, $p_0 \neq 0$, $q_0 \neq 0$. En exprimant $P'Q = PQ'$ avec cette décomposition, on trouve pour le n-ème coefficient la relation suivante :

$$\sum_{i=0}^{n}(i+1)[p_{i+1}q_{n-i} - p_{n-i}q_{i+1}] = 0$$

On définit $c = p_0 q_0^{-1}$. Montrons par récurrence forte sur n le fait suivant : $p_n = cq_n$.
— En $n = 0$, il s'agit de la définition de c.
— Soit $n \geq 1$. Supposons le résultat vrai pour $i < n$. Alors, on écrit :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^{n-1}(i+1)[p_{i+1}q_{n-1-i} - p_{n-1-i}q_{i+1}] \\ &= \sum_{i=0}^{n-2}(i+1)[cq_{i+1}q_{n-1-i} - cq_{n-1-i}q_{i+1}] + n[p_n q_0 - p_0 q_n] \\ &= nq_0[p_n - cq_n] \end{aligned}$$

Puisque $n \neq 0$ dans A (car A est de caractéristique nulle), que $q_0 \neq 0$, et que A est sans diviseurs de zéro, on a $p_n = cq_n$.

Cela montre $P = cQ$. □

Remarque 98. *Si k n'est pas de caractéristique nulle mais de caractéristique p, on a $(X^p)' = 0$ mais $X^p \notin A$.*

Ainsi, grâce à la dérivation dont il est muni, ∂A permet de retrouver A. Puisqu'on a vu qu'en général A avait des propriétés plus fortes que ∂A, il est tentant d'avoir la démarche inverse : en partant d'un anneau B muni d'une dérivation $\mathcal{D}$, on cherche des bonnes hypothèses à faire sur B et sur $\mathcal{D}$ pour que l'anneau $ker(\mathcal{D})$ ait des propriétés intéressantes (plus fortes que celles de B).

7.3.3 Quelles sont les bonnes hypothèses sur B et $\mathcal{D}$? ?

7.4 Khanfirien

Dans la suite, on fixe un anneau A simple, sans diviseurs de zéro, de centre k.

Définition 99. *On définit, pour tous $x, a \in A$,*

$$\gamma_x(a) = \{b \in A \mid \exists c \in A, ab - ca = x\}$$

$$\delta_x(a) = \{c \in A \mid \exists b \in A, ab - ca = x\}$$

On définit par ailleurs $\gamma = \gamma_0$ (khanfirien à gauche) et $\delta = \delta_0$ (khanfirien à droite).[1]

On sait par exemple que $Comm(a) \cup Aa \subset \gamma(a)$ et $Comm(a) \cup aA \subset \delta(a)$

Remarque 100. *Pour qu'un élément $a \neq 0$ soit inversible, il suffit que $\gamma_1(a)$ (ou $\delta_1(a)$) contienne un élément de k. Dans ce cas, il est égal à A.*

Remarque 101. *L'anneau A est faiblement fadélien si et seulement si, pour tout $a \in A \setminus \{0\}$, $\gamma_1(a)$ (ou $\delta_1(a)$) est non vide. Il est fadélien lorsque pour tout $x \in A$, pour tout $a \in A \setminus \{0\}$, $\gamma_x(a)$ (ou $\delta_x(a)$) est non vide.*

Remarque 102. *Pour tout élément $a \in A$, $\gamma(a)$ et $\delta(a)$ sont des k-sous-algèbres de A.*
De plus, si A est sans diviseurs de zéro, pour tout $b \in \gamma_0(a)$ il existe un ***unique*** *$\tilde{b} \in \delta_0(a)$ tel que $ab - \tilde{b}a = 0$ (et vice-versa). L'application $b \mapsto \tilde{b}$ de $\gamma(a)$ dans $\delta(a)$, qui est bien définie et clairement linéaire, est alors un isomorphisme d'algèbres (on a bien $\widetilde{bc} = \tilde{b}\tilde{c}$ car $abc = \tilde{b}ac = \tilde{b}\tilde{c}a$).*

1. On écrit ici $ab - ca = x$ et non $ab + ca = x$ pour que l'application $\tilde{\ }$ définie ensuite soit un morphisme d'algèbres entre $\gamma(a)$ et $\delta(a)$. Si on avait écrit $ab + ca = 0$, alors on aurait en effet eu $\tilde{1} = -1$.

Propriété 103. *Pour tout $x, a \in A$, les ensembles $\gamma_x(a)$ et $\delta_x(a)$ sont soit tous les deux vides, soit tous les deux isomorphes à $\gamma(a)$ (et donc à $\delta(a)$).*

Preuve. Si ces deux ensembles sont vides, c'est clair. Sinon, soit $b, c \in A$ tels que $ab - ca = x$. On remarque que $\gamma_x(a) = b + \gamma(a)$ et $\delta_x(a) = c + \delta(a)$. L'isomorphisme vient alors de soi. $\square$

Proposition 104. *Soit un morphisme d'algèbre $f : A \mapsto A$. Alors, pour tout $a \in A$, f induit par restriction un morphisme d'algèbres entre $\delta(a)$ et $\delta(f(a))$ qui commute avec $\tilde{\cdot}$ (c'est-à-dire que $\widetilde{f(d)} = f(\tilde{d})$).*

Preuve. Il suffit essentiellement de remarquer que si $d \in \delta(a)$, alors $f(d)f(a) = f(da) = f(a\tilde{d}) = f(a)f(\tilde{d})$ d'où $f(d) \in \delta(f(a))$ et $\widetilde{f(d)} = f(\tilde{d})$. $\square$

Si f est un automorphisme, alors on obtient de même un isomorphisme d'algèbres entre $\delta(a)$ et $\delta(f(a))$. Ceci peut potentiellement servir à limiter la forme des automorphismes.

7.5 Objets non encore étudiés

- « Matrices » sur un anneau (faiblement) fadélien
- Éléments irréductibles d'un anneau (faiblement) fadélien
- Automorphismes d'un anneau (faiblement) fadélien
- Valuations sur un anneau (faiblement) fadélien
- Actions, représentations d'un anneau (faiblement) fadélien

8 Problèmes ouverts

1. Existe-t-il un anneau faiblement fadélien non fadélien ?
2. Existe-t-il un anneau fadélien de type fini sur son centre (comme algèbre) qui ne soit pas à division ?