Espaces 2-flimsy et ordres

Le DMI

7 novembre 2018

Avertissement/conseil au lectorat : pour comprendre les motivations des énoncés (et faire des économies de Doliprane), faire des schémas au fur et à mesure en gardant en tête qu'un espace 2-flimsy doit ressembler autant que possible à un cercle.

On utilisera librement les résultats prouvés par KHANFIR dans son article fondateur.

1 Ordonnons les espaces flimsy

Soit X un espace 2-flimsy et $\xi \in X$, fixés dans toute cette section.

1.1 Lemmes techniques utiles

Dans la suite, on dira qu'un espace X est 1-flimsy gentil s'il est 1-flimsy, T_1 (les singletons sont fermés), infini, et que pour tout $a \in X$, $X \setminus \{a\}$ a deux composantes connexes.

Lemme 1. *Les composantes connexes d'un* 1*-flimsy gentil auquel on a privé un point sont des* 1*-flimsy gentils.*

Preuve. Le caractère T_1 va de soi.

Soit X un 1-flimsy gentil, $x, y \in X$. Soit C la composante connexe de $X \setminus \{x\}$ qui contient y et C' l'autre. On veut montrer que $C \setminus \{y\}$ est formé de deux composantes connexes.

Soit D la composante connexe de $X \setminus \{y\}$ qui contient x et D' l'autre. On a :

$$X = \{x, y\} \cup (C \cap D) \cup (C' \cap D) \cup (C \cap D') \cup (C' \cap D')$$

Montrons que D et D' rencontrent toutes deux C. Déjà, soit D soit D', rencontre C (car X est infini donc non réduit à deux points). Si par exemple D rencontre C, mais que D' ne rencontre pas C, alors $C = (D \cap C) \cup \{y\}$. Mais alors $X = \{y\} \cup D$ et donc $X \setminus \{y\} = D$ est connexe ce qui contredit sa 1-flimsitude. Le même argument montre que D doit rencontrer C si D' le rencontre. Donc D et D' rencontrent tous deux C.

Ainsi :

$$C = (C \cap D) \cup (C \cap D')$$

$C \cap D$ et $C \cap D'$ sont des fermés non vides de C, et ils sont aussi ouverts puisque C, D, D' le sont (ils font partie des composantes connexes, en nombre fini, de complémentaires de singletons et donc d'ouverts puisque X est T_1). □

Lemme 2. *Soit X un espace* 2*-flimsy et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ une famille de n points distincts de X. Alors $X \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$ a n composantes connexes, qui sont toutes des espaces* 1*-flimsy gentils.*

Preuve. Montrons le par récurrence : pour $n = 1$, cela fait partie de la définition d'espace 2-flimsy.

Supposons le résultat connu pour les familles de n points et soit $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ une famille de n points distincts de X. Alors $X \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$ a n composantes connexes. Soit C la composante connexe contenant x_{n+1}. Par hypothèse de récurrence, c'est un espace 1-flimsy gentil et donc $X \setminus \{x_1, \ldots, x_{n+1}\} = (X \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}) \setminus C) \cup (C \setminus \{x_{n+1}\})$ a bien $(n-1) + 2 = n + 1$ composantes connexes, qui sont des 1-flimsy gentils d'après le lemme précédent. □

Lemme 3. *Le complémentaire d'un connexe de X est connexe.*

Preuve. Soit $A \subset X$ connexe. Si $A = X$, le résultat est clair. Sinon, on fixe $\psi \in \overline{A}^c$ et on note, pour tous $x, y \in A^c$, $C(x, y)$ la composante connexe de $X \setminus \{x, y\}$ dans laquelle A est inclus (il y en a forcément une qui intersecte A, et elle le contient alors entièrement puisque A est connexe dans $X \setminus \{x, y\}$).

Montrons :

$$A = \bigcap_{x,y \in A^c, \psi \notin C(x,y)} C(x, y)$$

Déjà, il est clair que $\subset$ est vraie par définition de $C(x, y)$. Par ailleurs, il suffit de montrer $\forall x \in A^c, \exists y, \psi \notin C(x, y)$ pour en déduire que l'ensemble de droite est inclus dans A. Soit $x \in A^c$. Il y a deux cas :

- Si $x = \psi$: on peut prendre $y = x$, alors $C(x, x) = X \setminus \{\psi\}$
- Sinon : soit $\alpha \in A$ arbitraire et U la composante connexe de $X \setminus \{\psi, \alpha\}$ ne contenant pas x. Si $U \subset \overline{A}$, alors $\overline{U} \subset \overline{A}$ donc $\psi \in \overline{A}$, ce qui contredit le choix de ψ. $\overline{U \subset A}$ est donc non vide. Soit y dans $U \setminus \overline{A}$. Si on regarde $X \setminus \{\alpha, x, y, \psi\}$, il a quatre composantes connexes, chacune délimitée par deux de ces quatre points (on notera $]a_1, a_2[$ la composante connexe dont l'adhérence contient a_1 et a_2). Par construction, on a

$$X = \{x, \alpha, y, \psi\} \cup]x, \alpha[\cup]\alpha, y[\cup]y, \psi[\cup]\psi, x[$$

  comme on s'en rend compte en remarquant que la composante connexe de $X \setminus \{x, \alpha, \psi\}$ qu'on « coupe en deux » en privant y (selon la preuve du lemme précédent) est celle qui contient y, et donc par définition de y celle délimitée par α et ψ (les deux autres sont délimitées par x et sont donc incluses dans la composante connexe de $X \setminus \{\alpha, \psi\}$ contenant x).

Ainsi :

$$A^c = \bigcup_{x,y \in A^c, \psi \in C(x,y)^c} C(x, y)^c$$

Les $C(x, y)^c$ sont des connexes de X (il s'agit de l'adhérence de l'autre composante connexe de $X \setminus \{x, y\}$), et ils contiennent tous ψ, leur union est donc bien un connexe. □

Lemme 4. *Soit deux connexes $A, B \subset X \setminus \{\xi\}$. Alors l'intersection de A et B est connexe.*

Preuve. $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$. Or A^c et B^c sont, d'après le lemme précédent, deux connexes qui contiennent tous deux le point ξ, et leur union est donc connexe. Toujours par le lemme précédent, $A \cap B$ est donc connexe. □

Lemme 5. *Si A, B sont deux connexes non vides d'union non connexe de X, alors $X \setminus (A \cup B)$ a exactement deux composantes connexes.*

Preuve. Soit $\alpha \in A, \beta \in B$. Soit C, C' les deux composantes connexes de $X \setminus \alpha, \beta$. Montrons que $C_1 = C \setminus (A \cup B)$ et $C_2 = C' \setminus (A \cup B)$ sont les composantes connexes de $X \setminus (A \cup B)$.

Déjà : C_1 est non vide car sinon $C \subset A \cup B$ donc $X = (A \cup B) \cup C_2$ et donc $A \cup B = C_2^c$ est le complémentaire d'un connexe et est donc connexe. De même C_2 est non vide.

Ensuite C_1 et C_2 sont connexes. En effet, $C_1^c = A \cup C' \cup B$ est connexe ($A \cup C'$ est connexe car $\alpha \in A \cap \overline{C'}$, $(A \cup C') \cup B$ est connexe car $\beta \in B \cap \overline{A \cup C'}$) donc C_1 est connexe, de même pour C_2. De plus $C_1 \sqcup C_2 = X \setminus (A \cup B)$ et les adhérences de C_1 et de C_2 sont disjointes dans $X \setminus (A \cup B)$ puisqu'elles ne peuvent (dans X) avoir de point commun qu'en α et en β qui ne sont pas dans $X \setminus (A \cup B)$. □

Lemme 6. *Un connexe non vide d'intérieur vide de X est réduit à un point.*

Preuve. Supposons A connexe, et soit $x, y \in X$ distincts dans A.

Le complémentaire de A est connexe et contenu dans $X \setminus \{x, y\}$, et est donc au plus contenu dans l'une des deux composantes connexes de $X \setminus \{x, y\}$. Ainsi, A contient une des deux composantes connexes de $X \setminus \{x, y\}$, et est donc d'intérieur non vide. □

1.2 Orientations

On nomme *orientation* de $X \setminus \{\xi\}$ une partie connexe O de $X \setminus \{\xi\}$ qui n'est ni d'intérieur vide ni dense dans $X \setminus \{\xi\}$, et dont l'adhérence dans X contient ξ. Deux orientations sont dites compatibles lorsque leur intersection est une orientation.

Lemme 7. *Le complémentaire (dans $X \setminus \{\xi\}$) d'une orientation O est une orientation, notée $-O$.*

Preuve. Soit O une orientation. Tous les points sont clairs sauf l'appartenance de ξ à l'adhérence de $-O$. Supposons donc que ξ n'appartienne pas à l'adhérence de $-O$ (dans X). Alors $-O \cup \{\xi\}$ n'est pas connexe donc $O = X \setminus (-O \cup \{\xi\})$ a deux composantes connexes ce qui contredit la connexité de O. $\square$

Lemme 8. *Soit O et O' deux orientations. Alors O et O' sont compatibles si et seulement si $-O$ et $-O'$ sont compatibles.*

Preuve. Puisque $-(-O) = O$, il suffit de montrer l'implication. Supposons O et O' compatibles. Ainsi $O \cap O'$ est une orientation.

$$(-O) \cap (-O') = (O^c \cap O'^c) \setminus \{\xi\} = (O \cup O' \cup \{\xi\})^c = -(O \cup O')$$

Cela revient donc à montrer que $O \cup O'$ est une orientation. Les seuls points non évidents sont la connexité et la non-densité de $O \cup O'$.

Puisque $O \cap O'$ est une orientation, cet ensemble est non vide, et donc l'intersection des connexes O^c et O'^c est connexe, d'après un lemme vu précédemment. Ainsi $O^c \cap O'^c = (O \cup O')^c$ est connexe et donc $O \cup O'$ est connexe.

Supposons $O \cup O'$ dense dans $X \setminus \{\xi\}$ (et donc dans X). On a alors $O \cup O' = X \setminus \{\xi\}$. En effet $(O \cup O')^c$ est une partie connexe de X d'intérieur vide, et elle est donc réduite à un point, à savoir ξ. Soit $\psi \in X \setminus (\{\xi\} \cup (O \cap O'))$ quelconque (cela est possible car $O \cap O'$ n'est pas dense dans $X \setminus \{\xi\}$ par définition d'une orientation), alors quitte à échanger O et O' on peut supposer $\psi \in O' \setminus O$. Montrons alors que $O' = X \setminus \{\xi\}$, ce qui fournira une contradiction.

On note C_1 la composante connexe de $X \setminus \{\xi, \psi\}$ contenant $O \cap O'$ (entre autres) et C_2 l'autre (dont tous les éléments sont nécessairement dans O').

Soit $y \in X \setminus \{\xi\}$. Si $y \notin O'$, alors $y \in C_1$ et $y \in O$. Regardons les composantes connexes de $C_1 \setminus \{y\}$: l'une, notée D_1, contient les éléments de $O \cap O'$ (celle dont l'adhérence contient ξ), l'autre contient des éléments de O mais aucun de O' par connexité de O'. Cela contredit l'appartenance de ψ à O' (à rédiger proprement mais l'idée est là). Donc $X \setminus \{\xi\} = O'$ ce qui contredit la non-densité de O'. $\square$

Lemme 9. *Soit O et O' deux orientations. Alors O et O' sont incompatibles si et seulement si ξ est dans l'intérieur de $O \cup O' \cup \{\xi\}$.*

Preuve. « ξ est dans l'intérieur de $O \cup O' \cup \{\xi\}$ » est le contraire de « ξ est dans l'adhérence de $(-O) \cap (-O')$ », qui correspond à dire que $-O$ et $-O'$ sont compatibles, et donc que O et O' sont compatibles. $\square$

Lemme 10. *Soit O, O' deux orientations compatibles. Alors il existe un voisinage connexe $U \neq X$ de ξ dans X tel que $U \cap O = U \cap O' = U \cap (O \cap O')$.*

Preuve. Soit $\alpha \in O \cap O'$ et $\beta \in X \setminus (O \cup O' \cup \{\xi\})$ ($O \cup O'$ est non dense comme on l'a vu). Soit U la composante connexe de ξ dans $X \setminus \{\alpha, \beta\}$ et V l'autre composante connexe. U est un voisinage connexe $U \neq X$ de ξ dans X.

$O \cap (-O')$ est un connexe de $X \setminus \{\alpha, \beta\}$. Il est donc intégralement inclus soit dans U soit dans V. S'il est inclus dans U (... ALORS IL EST VIDE ?)

Cela s'applique également à $O' \cap (-O)$. Les connexes $O \cap (-O')$ et $O' \cap (-O)$ sont donc inclus dans V. Calculons $U \cap O$.

$$U \cap O = (U \cap O \cap (-O')) \cup (U \cap O \cap O') = \emptyset \cup (U \cap O \cap O') = U \cap O \cap O'$$

De même $U \cap O' = U \cap O \cap O'$, ce qui achève la preuve. $\square$

Lemme 11. *La compatibilité des orientations est une relation d'équivalence, pour laquelle il existe exactement deux classes d'équivalence.*

Preuve. La symétrie, la réflexivité sont claires. Montrons la transitivité.

Supposons que $A, B, C, A \cap B, A \cap C$ sont compatibles. Soit un voisinage connexe $U_1 \neq X$ de ξ dans X tel que $U_1 \cap A = U_1 \cap B = U_1 \cap (A \cap B)$. Soit de même un voisinage connexe $U_2 \neq X$ de ξ dans X tel que $U_2 \cap B = U_2 \cap C = U_2 \cap (B \cap C)$. Alors $U = U_1 \cap U_2$ est un voisinage connexe de ξ dans X tel que $U \cap A = U_2 \cap U_1 \cap A = U_2 \cap U_1 \cap B = U \cap B$ et $U \cap B = U \cap C$ de même. Donc $U \cap A = U \cap C$. Donc $A \cap C = (U \cap A) \cup (U^c \cap A)$.

$A \cap C$ est connexe (car A et C le sont et sont inclus dans $X \setminus \{\xi\}$), non dense (car inclus dans A qui est une orientation). $U \cap A$ a ξ dans son adhérence (car U est un voisinage de ξ et que A a ξ dans son adhérence) et donc $A \cap C$ également. De plus $U \cap A$ est d'intérieur non vide, sans quoi il serait réduit à un point et ne pourrait pas avoir ξ dans son adhérence. Pour cette raison, $A \cap C$ est bien connexe, d'intérieur non vide, non dense, d'adhérence contenant ξ, et est donc bien une orientation.

Le fait qu'il n'y ait que deux classes d'équivalence est une conséquence immédiate du lemme suivant :

Lemme 12. *Deux orientations O et O' sont compatibles si et seulement si $-O$ et O' sont incompatibles.*

Preuve. Supposons $-O$ et O' incompatibles. Alors ξ est dans l'intérieur de $(-O) \cup (O') \cup \{\xi\}$. Soit un ouvert connexe U contenant ξ et inclus dans $(-O) \cup (O') \cup \{\xi\}$. Alors $U \setminus \{\xi\}$ a deux composantes connexes (car $U = X \setminus (U^c)$ et U^c est un connexe vérifiant $U^c \cup \xi$ non connexe). Nécessairement, l'une des deux composantes connexes a une intersection non vide avec $-O$ et doit donc contenir $(-O) \cap U$ en entier, par le même argument une composante connexe contient tout $O' \cap U$ et c'est forcément l'autre. Puisque $O \cap U$ et $(-O) \cap U$ ont une intersection vide mais que $O \cap U$ doit avoir ξ dans son adhérence, $O \cap U$ est contenu tout entier dans la composante connexe contenant $O' \cap U$. Donc ξ n'est pas dans l'intérieur de $O \cup O' \cup \{\xi\}$ (sinon il serait dans l'intérieur de $(O \cup O' \cup \{\xi\}) \cap U = (O \cap U) \cup \{\xi\}$ et on finirait par contredire la non-densité [à rédiger proprement]). O et O' sont donc compatibles.

O et $-O$ sont clairement incompatibles, donc si O et O' sont compatibles, $-O$ et O' sont incompatibles (sans quoi on aurait $-O$ et O compatibles). □

□

On va avoir besoin des orientations pour pouvoir parcourir un espace 2-flimsy privé d'un point « dans un sens » afin de définir un ordre.

1.3 Ordre et propriétés

Si x, y sont deux points distincts de $X - \xi$, on définit l'orientation canonique $O(x, y)$ (« orientation de x vers y ») comme la composante connexe de $X - \{\xi, y\}$ contenant x.

Remarque 13. *$O(x, y)$ et $O(y, x)$ ne sont jamais compatibles, car leur intersection est la composante connexe de $X - \{x, y\}$ ne contenant pas ξ, et son adhérence ne contient pas ξ.*

Fixons une classe arbitraire γ d'orientations et posons $x < y$ lorsque $O(x, y) \in \gamma$.

Théorème 14. *Cela définit un ordre (strict) total. L'intervalle ouvert $]x, y[$ pour cet ordre (quand $x < y$) est la composante connexe de $X - \{x, y\}$ ne contenant pas ξ. En particulier, les intervalles sont connexes donc l'ordre est complet et dense. Il est également (clairement) sans maximum ni minimum.*

Preuve. Si $x < y$ et $y < x$, alors $O(x, y)$ et $O(y, x)$ sont compatibles, ce qui est faux.

Si $x < y$ et $y < z$, alors $O(x, y)$ et $O(y, z)$ sont dans γ. $O(x, z)$ est une des deux composantes connexes de $X \setminus \{\xi, z\}$, à savoir celle qui contient x. Puisque $O(x, y)$ est un connexe de $X \setminus \{\xi, z\}$ (car $z \notin O(x, y)$ [à prouver correctement]) contenant x, il est donc inclus dans $O(x, z)$ d'où $O(x, y) \subset O(x, z)$ et, en particulier, la compatibilité entre ces deux orientations. Ainsi $O(x, z) \in \gamma$.

Puisque $O(x, y)$ et $O(y, x)$ sont incompatibles, il y en a toujours exactement un des deux qui est dans γ. L'ordre est donc total.

[Reste : à prouver correctement] □

Lemme 15. *Les connexes de X sont exactement les ensembles d'un des vingt types suivants : X, l'ensemble vide, $\{\xi\}$, $X \setminus \{\xi\}$, les $]a,b[$ pour $a,b \in X \setminus \{\xi\}$ (ainsi que les $[a,b[,]a,b], [a,b]$), les $\{x \mid x > a\}$ pour un certain $a \in X \setminus \{\xi\}$ (ainsi que les $\{x \mid x \geq a\}, \{x \mid x > a\} \cup \{\xi\}, \{x \mid x \geq a\} \cup \{\xi\},$), les $\{x \mid x < b\}$ pour un certain $b \in X \setminus \{\xi\}$ (ainsi que les $\{x \mid x \leq b\}, \{x \mid x < b\} \cup \{\xi\}, \{x \mid x \leq b\} \cup \{\xi\}$), et les $\{x \mid x > a\} \cup \{\xi\} \cup \{x \mid x < b\}$ (ainsi que les $\{x \mid x \geq a\} \cup \{\xi\} \cup \{x \mid x < b\}$, $\{x \mid x > a\} \cup \{\xi\} \cup \{x \mid x \leq b\}$, $\{x \mid x \geq a\} \cup \{\xi\} \cup \{x \mid x \leq b\}$).*

Preuve. Commençons par traiter le cas où $A \subset X \setminus \{\xi\}$ est connexe, non vide, et borné (majoré et minoré). Alors A a un supremum s et un infimum i. L'intervalle $]i,s[$ est la composante connexe de $X \setminus \{i,s\}$ ne contenant pas ξ, et $A \setminus \{s,i\}$ est un connexe de cet ensemble ne contenant pas ξ et ayant i et s dans son adhérence, il est donc égal à $]i,s[$. Reste la possibilité d'inclure ou non i et s. Cela représente quatre des vingt types.

Supposons $A \subset X \setminus \{\xi\}$ minoré non majoré. Alors A a un infimum i et ξ est dans son adhérence. $\{x \mid i < x\}$ est la composante connexe de $X \setminus \{i,\xi\}$ qui est incompatible avec l'orientation, et $A \setminus \{i\}$ est un connexe de $X \setminus \{i,\xi\}$ non majoré ayant i et ξ dans son adhérence, il est donc égal à $\{x \mid i < x\}$ (on ne redétaillera pas à chaque fois cette argument quand on l'utilisera). Reste la possibilité d'inclure ou non i. Tous les autres cas pour $A \subset X \setminus \{\xi\}$ se traitent similairement.

On pourrait déduire tous les cas avec $\xi \in A$ en remarquant que ce sont les complémentaires des types déjà classifiés. Voyons cependant un dernier cas intéressant : $A \subset X$ connexe avec $\xi \in A$ et $A \neq X$. Soit alors $y \in X \setminus A$. $X \setminus \{\xi, y\}$ a deux composantes connexes notées X_1 (pour celle compatible avec l'orientation) etX_2 (pour l'autre). Notons $A_1 = X_1 \cap A, A_2 = X_2 \cap A$. Il y a plusieurs cas :

- Si $A_1 = \emptyset$, $A_2 = \emptyset$, alors $X = \{\xi\}$.
- Si $A_1 = \emptyset$, $A_2 \neq \emptyset$, on pose $i = \inf A_2$ et alors on a $\{x \mid x > i\} \cup \{\xi\}$, avec potentiellement i en plus.
- Si $A_2 \neq \emptyset$, $A_2 = \emptyset$, le cas est similaire.
- Si $A_1 \neq \emptyset$, $A_2 \neq \emptyset$, alors on a un ensemble de la forme $\{x \mid x > i\} \cup \{\xi\} \cup \{x \mid x < s\}$, avec $i = \inf A_2$ et $s = \sup A_1$, avec potentiellement i et/ou s en plus.

□

1.4 Topologie de l'ordre et comparaison

Définissons la topologie alternative T sur X suivante : T est engendrée par les intervalles ouverts de $X - \xi$ ainsi que les ensembles de la forme $\{\xi\} \cup \{x \mid x < a\} \cup \{x \mid b < x\}$ pour des $a < b \in X - \xi$.

À montrer 16. *T est également la topologie engendrée par les composantes connexes de $X - \{x,y\}$ pour tout choix de x,y (en particulier, T ne dépend pas de ξ).*

Question 17. *À quel point T et la topologie initiale sur X peuvent-elles différer ? On a montré qu'ils avaient les mêmes connexes.*

1.5 Orientation globale

Soit X un espace 2-flimsy et ξ_1, ξ_2 deux points distincts de X.

Soit O_1 une orientation de $X \setminus \{\xi_1\}$ et O_2 une orientation de $X \setminus \{\xi_2\}$. Soit U_1 et U_2 deux ouverts connexes disjoints avec $\xi_i \in U_i$ (montrer l'existence) tels que $O_1' = U_1 \cap O_1$ et $O_2' = U_2 \cap O_2$ soient connexes. Alors O_1' (resp. O_2') est une orientation de $X \setminus \{\xi_1\}$ (resp. de $X \setminus \{\xi_2\}$) compatible avec O_1 (resp. avec O_2). On dit alors que O_1 et O_2 sont compatibles si O_1' et O_2' ne sont pas incluses dans la même composante connexe de $X \setminus \{\xi_1, \xi_2\}$.

À montrer 18. *Cela ne dépend pas du choix de U_1, U_2.*

À montrer 19. *O_1 et O_2 sont incompatibles si et seulement si il existe O_1', O_2' compatibles respectivement avec O_1, O_2 telles que $O_1' \cap O_2'$ soit non vide et inclus dans $X \setminus \{\xi_1, \xi_2\}$.*

À montrer 20. *Soit $<$ l'ordre sur $X \setminus \{\xi_1\}$ induit par l'orientation O. Alors O et O' sont compatibles si et seulement s'il existe $a \in X \setminus \{\xi_1\}$ avec $\xi_2 < a$ tel que l'orientation $]\xi_2, a[$ de $X \setminus \{\xi_2\}$ soit compatible avec O' (et dans ce cas tout $a > \xi_2$ convient).*

À montrer 21. *Il y a transitivité + compatibilité avec la compatibilité des orientations de $X \setminus \{\xi_1\}$ (resp. de $X \setminus \{\xi_1\}$). Il y a exactement deux classes d'équivalences.*

Une classe d'équivalence d'orientations pour cette définition de la compatibilité est nommée orientation globale de X.

1.6 Compacité des espaces 2-flimsy

Théorème 22. *Soit X un espace 2-flimsy. Alors X est compact si et seulement si la topologie de X coïncide avec la topologie de l'ordre.*

Proposition 23. *Si X n'est pas muni de la topologie de l'ordre, alors X n'est pas compact.*

Preuve. Il est toujours vrai que les intervalles ouverts sont des ouverts, donc si la topologie de X n'est pas la topologie de l'ordre, c'est qu'il existe un ouvert U de X et un point $x \in U$ tels qu'il n'existe pas d'intervalle ouvert contenant x et inclus dans U. Fixons de tels x, U. Quitte à changer ξ (ce qui ne change ni la topologie ni la topologie de l'ordre), on peut supposer $x \neq \xi$.

On pose $Y = X \setminus U$. Pour tout $y \in Y$, soit $g(y) < y < d(y)$ tels que $x \notin [g(y), d(y)]$ (cela est toujours possible par densité). On partitionne Y en deux : Y_1 est l'ensemble des $y \in Y$ tels que $x < g(y)$ et Y_2 l'ensemble des $y \in Y$ tels que $x > d(y)$. Ainsi $X \setminus U \subset \bigcup_{y \in Y}]g(y), d(y)[$. Et donc

$$X = U \cup \left(\bigcup_{y \in Y}]g(y), d(y)[\right)$$

Il s'agit d'un recouvrement de X par des ouverts. Supposons X compact. Il existe alors une partie finie Y' de Y telle que :

$$X = U \cup \left(\bigcup_{y \in Y'}]g(y), d(y)[\right)$$

On pose $g_1 = \min\{g(y), y \in Y_1\}$ (ou un élément quelconque de $\{y \mid x < y\}$ si l'ensemble est vide), $d_1 = \max\{d(y), y \in Y_1\}$ (ou un élément quelconque $> g_1$ si l'ensemble est vide). On a alors $\bigcup_{y \in Y' \cap Y_1}]g(y), d(y)[\subset]g_1, d_1[$. De manière identique, on trouve deux éléments $g_2 < d_2 \in \{y \mid y < x\}$ tels que $\bigcup_{y \in Y' \cap Y_2}]g(y), d(y)[\subset]g_2, d_2[$. Ainsi :

$$X = U \cup]g_1, d_1[\cup]g_2, d_2[$$

Soit :

$$U \supset X \setminus \Big( ]g_1, d_1[\cup]g_2, d_2[\Big)$$

L'ouvert $X \setminus \Big([g_1, d_1] \cup [g_2, d_2] \Big)$ (qui contient x) a exactement deux composantes connexes, qui sont donc des ouverts de X. Soit W celle qui contient x. W est un connexe ouvert inclus dans U et contenant x, ce qui contredit le choix de U et x. □

Proposition 24. *Tout espace 2-flimsy, muni de la topologie de l'ordre, est compact.*

Preuve. La séparation a été établie par Khanfir. Supposons que X est un espace 2-flimsy muni de la topologie de l'ordre et recouvert par une famille $(U_i)_{i \in I}$ d'ouverts.

Soit $\xi \in X$. On désignera par $<$ l'ordre sur $X \setminus \{\xi\}$ obtenu par la construction précédente, pour un choix arbitraire d'orientation.

On sait que ξ est dans un certain ouvert U_{i_0}. Soit U'_{i_0} un ouvert connexe contenant ξ et inclus dans U_{i_0} (ce qui est toujours possible par définition de la topologie de l'ordre) : U'_{i_0} est de la forme $\{x \mid \beta < x\} \cup \{\xi\} \cup \{x \mid x < \alpha\}$. Ainsi, le cas de $\{x \mid \beta < x\} \cup \{\xi\} \cup \{x \mid x < \alpha\}$ est réglé : il est recouvert par U_{i_0}. Reste à recouvrir $[\alpha, \beta]$ par un nombre fini d'ouverts extraits des $(U_i)_{i \in I}$.

Soit :

$$\mathcal{S} = \{x \in [\alpha, \beta] \mid [\alpha, x] \text{ peut être recouvert par un nombre fini d'ouverts de } (U_i)\}$$

Alors $\mathcal{S}$ est non vide, car il contient α (qui est dans un certain U_{i_1}), et il est majoré par β. Puisque l'ordre est complet, $\mathcal{S}$ admet donc un supremum $s = \sup \mathcal{S}$. Montrons que $s = \beta$.

L'élément s est contenu dans un certain ouvert U_{i_2}. Soit U'_{i_2} un ouvert connexe contenant s et inclus dans U_{i_2} (ce qui est possible avec la topologie de l'ordre), de la forme $]s_1, s_2[$ avec $s_1 < s < s_2$. Alors, puisque s est un supremum et $s_1 < s$, on sait qu'il existe $s_3 \in [s_1, s]$ tel que $s_3 \in \mathcal{S}$. Écrivons donc $[\alpha, s_3] = \bigcup_{j \in J \text{ finie}} U_j$.

Supposons $s \neq \beta$. Soit (par densité de l'ordre) $s_4 \in]s, s_2[\cap]s, \beta[$. Alors :

$$[\alpha, s_4] \subset [\alpha, s_3] \cup]s_1, s_2[\subset \left(\bigcup_{j \in J \text{ finie}} U_j \right) \cup U_{i_2}$$

Donc $s_4 \in \mathcal{S}$, ce qui contredit que s soit un supremum. Ainsi $s = \beta$, et donc $[\alpha, \beta]$ peut être recouvert par un nombre fini d'ouverts tirés du recouvrement $(U_i)_{i \in I}$, et il en est de même de $X = U_{i_o} \cup [\alpha, \beta]$. $\square$

2 Flimsifions les ensembles ordonnés

Soit X un ensemble totalement ordonné pour un ordre dense et complet (c'est-à-dire un ordre tel que les intervalles soient connexes pour la topologie de l'ordre), sans maximum ni minimum. On va "replier X sur lui-même" pour en faire une sorte de cercle.

Soit $\tilde{X} = X \sqcup \{\xi\}$ avec la topologie engendrée par les intervalles ouverts de X et les ensembles de la forme $\{\xi\} \cup \{x \mid x < a\} \cup \{x \mid b < x\}$ pour des $a < b \in X$.

Théorème 25. *$\tilde{X}$ est 2-flimsy.*

Preuve.

— **$\tilde{X}$ est connexe** Écrivons $\tilde{X} = U \sqcup V$ avec U, V ouverts (et fermés). Sans perte de généralité, on peut supposer $\xi \in U$. Alors U contient un ensemble de la forme $\{x \mid x < a\} \cup \{x \mid b < x\}$.
En particulier $U \setminus \{\xi\}$ est un ouvert fermé non vide de X qui est connexe (car l'ordre est dense et complet), il s'agit donc de X entier donc $U = X \cup \{\xi\}$ d'où $V = \emptyset$.

— **Pour tout $\psi \in \tilde{X}$, $\tilde{X} \setminus \{\psi\}$ est connexe :** Si $\psi = \xi$, $\tilde{X} \setminus \{\psi\} = X$ est connexe comme on le sait. Sinon, écrivons $\tilde{X} = U \sqcup V$ avec U, V ouverts et $\xi \in U$. Alors U contient un ensemble de la forme $\{x \mid x < a\} \cup \{x \mid b < x\}$, en particulier il contient un élément $\alpha < \psi$ (puisque l'ordre n'a pas de minimum) ainsi qu'un élément $\beta > \psi$ (puisque l'ordre n'a pas de maximum).
Mais alors, $U \setminus \{\xi\}$ est un ouvert fermé de $X \setminus \{\psi\}$, dont les deux composantes connexes sont $C_1 = \{x \mid x < \psi\}$ et $C_2 = \{x \mid \psi < x\}$. Il s'agit donc d'une union de composantes connexes. Puisque $\alpha \in C_1 \cap (U \setminus \{\xi\})$ et $\beta \in C_2 \cap (U \setminus \{\xi\})$, on en déduit que $U \setminus \{\xi\} = C_1 \cup C_2 = X \setminus \{\psi\}$ d'où $U = \tilde{X} \setminus \{\psi\}$ et donc $V = \emptyset$.

— **Pour tous $\psi, \psi' \in \tilde{X}$ distincts, $\tilde{X} \setminus \{\psi, \psi'\}$ n'est pas connexe :** Il y a deux cas : si $\xi \in \{\psi, \psi'\}$, on peut supposer $\xi = \psi$ sans perte de généralité et alors $\tilde{X} \setminus \{\psi, \psi'\} = X \setminus \{\psi'\}$ qui est non connexe puisqu'il a $\{x \mid x < \psi'\}$ et $\{x \mid \psi' < x\}$ comme composantes connexes. Sinon, on peut supposer $\psi < \psi'$ sans perte de généralité, et alors $\tilde{X}$ a $\{x \mid \psi' < x\} \cup \{\xi\} \cup \{x \mid x < \psi\}$ et $]\psi, \psi'[$ comme composantes connexes.

$\square$

En particulier, à toute ligne de SOUSLIN on peut associer un 2-flimsy. Le catalogue des 2-flimsies dépend donc des axiomes qu'on choisit pour la théorie des ensembles.

Il est par ailleurs clair qu'un des deux ordres qu'il est possible d'obtenir sur $X = \tilde{X} \setminus \{\xi\}$ est identique à l'ordre duquel on est parti sur X (les intervalles ouverts sont les mêmes, à savoir les connexes ouverts, ce qui détermine entièrement l'ordre à renversement près). Une orientation de $X = \tilde{X} \setminus \{\xi\}$ est un intervalle de X non borné et différent de X.

Voici par exemple une construction d'un espace 2-flimsy non homéomorphe au cercle. Pour tout ordinal κ, on pose :

$$X_\kappa = \kappa \times [0, 1[$$

muni de l'ordre lexicographique.

Proposition 26. *L'ordre induit sur X_κ est dense et complet.*

Preuve. Il suffit de montrer que X_κ est connexe. On le montre par récurrence transfinie sur κ.

Si $\kappa = 0$, X_κ est canoniquement homéomorphe à $[0, 1[$ et est donc connexe.

Si $\kappa = \lambda + 1$, alors $X_\kappa = X_\lambda \cup (\{\lambda\} \times [0, 1[)$. Par hypothèse de récurrence, X_λ est connexe ; il est connu que $(\{\lambda\} \times [0, 1[) \simeq [0, 1[$ est connexe. Par ailleurs $\sup X_\lambda = (\lambda, 0) \in \{\lambda\} \times [0, 1[$ donc l'union de ces deux parties est connexe. Ainsi, X_κ est connexe.

Si κ est limite, alors $X_\kappa = \bigcup_{\alpha\in\kappa} X_\alpha$. C'est une union de connexes (par hypothèse de récurrence) qui contiennent tous $(0, 0)$, et donc une partie connexe. □

Soit à présent κ un ordinal de cardinal strictement plus grand que $\aleph_0$, et $X = X_\kappa \setminus \{(0, 0)\}$. X est muni d'un ordre dense et complet (car il est connexe) sans minimum ni maximum, et on peut donc lui associer un espace 2-flimsy $\tilde{X} = X \cup \{\xi\}$. Or $|\tilde{X}| = \kappa > 2^{\aleph_0} = |S^1|$ donc ces espaces sont évidemment non homéomorphes.

3 Remarque sur les complémentaires de parties connexes

3.1 Caractérisation des espaces 2-flimsy

Théorème 27. *Les espaces 2-flimsy sont exactement les espaces T_1 dans lesquels le complémentaire d'un connexe est toujours connexe.*

(Un espace T_1 est un espace tel que « pour deux points distincts quelconques, chacun des deux points admet un voisinage qui ne contient pas l'autre point » ou, de manière équivalente, un espace dans lequel les singletons sont fermés)

Preuve. On sait que le complémentaire d'un connexe est connexe dans un espace 2-flimsy. Soit X un espace topologique dans lequel le complémentaire d'un connexe de X est connexe.

Déjà, $X = \emptyset^c$ est connexe. De plus, pour tout $x \in X$, $X \setminus \{x\}$ est connexe, puisque tout singleton est connexe.

Soit deux points distincts x, y de X. À quelle condition $X \setminus \{x, y\}$ est-il non connexe ? Cela revient à dire que l'ensemble $\{x, y\}$ est non connexe. Supposons $\{x, y\} = U \sqcup V$, avec U, V ouverts non vides de $\{x, y\}$. On peut supposer $U = \{x\}$, $V = \{y\}$. Puisque ce sont des ouverts de $\{x, y\}$, il existe des ouverts $\tilde{U}, \tilde{V}$ de X tels que $U = \{x, y\} \cap \tilde{U}$ et $V = \{x, y\} \cap \tilde{V}$. Autrement dit : si $X \setminus \{x, y\}$ est non connexe, il existe deux ouverts U, V de X tels que $x \in U, y \notin U$ et $y \in V, x \notin V$, et la réciproque est claire.

Par conséquent, X est 2-flimsy si et seulement s'il est T_1. □

3.2 Que vérifient les 1-flimsies par rapport au comportement des complémentaires de parties connexes ?

Par exemple : Complémentaire de connexe compact non vide = non connexe ?

A-t-on déjà montré qu'un 1-flimsy ne pouvait pas être compact ?

4 Généralisation des 2-flimsy

Espace X connexe T_1 non réduit à un point tel que pour tout point a :

- Pour tout ouvert connexe U contenant a, $U \setminus \{a\}$ a un nombre fini de composantes connexes. (A1)
- Il existe toujours un ouvert connexe U contenant a tel que $U \setminus \{a\}$ ait au moins deux composantes connexes. (A2)

Montrons par récurrence que pour toute famille finie $x_0, \dots, x_n$ de points distincts et pour tout ouvert connexe les contenant tous, $U \setminus \{x_0, \dots, x_n\}$ a un nombre fini de composantes connexes.

Cas $n = 0$: c'est la définition.

Hérédité : $U \setminus \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ a un nombre fini de composantes connexes $C_1, \dots, C_r$ par hypothèse, avec par exemple $x_n \in C_1$. C_1 est ouvert (car nombre fini de composantes connexes et U ouvert), connexe, contient x_n donc $C_1 \setminus \{x_n\}$ a un nombre fini de composantes connexes $D_1, \dots, D_s$. Alors $D_1, \dots, D_s, C_2, \dots, C_r$ est l'ensemble (fini) des composantes connexes de X.

Une partie X est dite régulière si elle a un nombre fini de composantes connexes, ou de manière équivalente si elle est union finie de connexes de X.

À montrer 28. *Les parties régulières sont stables par union finie, intersection finie, et complémentaire.*

On nomme degré d'un point $x \in X$ la borne supérieure du nombre de composantes connexes de $U \setminus \{x\}$ pour U ouvert connexe contenant x. Le degré est soit un entier supérieur à 2, et dans ce cas là le maximum est atteint, soit infini.

À montrer 29. *Si un espace vérifie* $(A1)$ *mais ne vérifie pas* $(A2)$*, on peut simplement éliminer les points de degré* 1*. On obtient un espace qui vérifie* $(A1)$ *et* $(A2)$*.*

Un point de degré exactement 2 est dit générique.

À montrer 30. *Si tous les points sont génériques (-> espace générique), on a soit un 2-flimsy, soit un 2-flimsy privé d'un point.*

Question 31. *Exemple avec point de degré infini ?*

À montrer 32. *Tout tel espace est somme connexe (infinie) d'espaces génériques le long d'un ouvert connexe. (Si* A, B *espaces génériques et* $U \subset A$ *ouvert,* $V \subset B$ *ouvert, avec un homéomorphisme* $\phi : U \simeq V$*, on note* $A \#_\phi B = (A \sqcup B)/(\forall x \in U, x = \phi(x))$*).*