Partiel

Exercice 1 Distance SNCF

1. La positivité et la symétrie sont claires. Pour la séparation si $d(x,y)=0$, soit on est dans le second cas et $x=y=0$, soit on est dans le premier et alors $x=y$ par séparation du module. Pour l'inégalité triangulaire, on sépare les cas où

- x,y,z pas alignés : $|x|+|z| \leqslant (|x|+|y|)+(|y|+|z|)$,
- x et z alignés mais pas y : $|z-x| \leqslant (|x|+|y|)+(|y|+|z|)$,
- x,y,z alignés : $|x-z| \leqslant |x-y|+|y-z|$,
- x,y alignés mais pas z : $|x|+|z| \leqslant |x-y|+|y|+|z|$.

2. Dans les deux cas de la définition on a $|x-y| \leqslant d(x,y)$. Donc les boules de la distance SNCF sont incluses dans les boules classiques. Ainsi la topologie est plus fine.

3. a) La restriction d'une application continue est continue.
b) Non car une telle application n'est pas forcément continue en 0. On peut prendre par exemple $x+iy \mapsto \frac{x^2y}{x^4+y^2}$.
c) Si on suppose de plus que f est continue en 0, f est continue en chaque point de $\mathbb{C}$: elle l'est en 0 par hypothèse, et elle l'est en tout autre point car les droites passant par 0 sont des voisinages ouverts de leurs points autres que 0.

4. Soit (u_n) une suite de Cauchy. C'est donc également une suite de Cauchy pour la distance usuelle et par conséquent elle converge vers une limite l pour la distance usuelle.

- Si $l=0$, alors $\forall \varepsilon > 0$ il existe un rang à partir duquel $|u_n| = d(u_n, 0) < \varepsilon$, donc la suite converge vers 0 pour d.
- Si $l \neq 0$. Soit $\varepsilon < \frac{|l|}{4}$, il existe un rang à partir duquel d'une part $d(u_n,u_m) < \frac{|l|}{4}$ $\forall n,m$ et $|u_n - l| < \varepsilon$. On a alors $|u_n| \geqslant |l| - \varepsilon > \frac{3|l|}{4}$, et donc la distance entre u_n et u_m est donnée par le premier cas (sinon elle serait $> \frac{3|l|}{2}$, ce qui est absurde), ainsi tous les u_n ont même argument, l aussi car c'est la limite classique des u_n, et on a bien $d(u_n,l) = |u_n - l| \to 0$.

5. L'espace est connexe car connexe par arcs et étoilé par rapport à 0. Si $x \in \mathbb{C}^*$, $\{\lambda x\}_{\lambda \in]1;+\infty[}$ est un ouvert fermé de $\mathbb{C}\backslash\{x\}$ qui n'est donc pas connexe.

6. Supposons K compact pour la distance SNCF. Alors il est compact pour la topologie usuelle car celle-ci est moins fine. (un recouvrement par des ouverts usuels est en particulier un recouvrement par des ouverts SNCF donc n peut en extraire un sous-recouvrement fini. De plus, si $\varepsilon > 0$, $\{\mathbb{R}^* e^{i\theta}\}_{\theta \in [0;2\pi[} \cup \{\mathcal{B}(0,\varepsilon)\}$ fournit un recouvrement ouvert de K, il est donc possible d'en extraire un recouvrement fini :

$$K \subset \mathcal{B}(0,\varepsilon) \cup \bigcup_1^p \mathbb{R}^* e^{i\theta_j},$$

ce qui fournit la condition demandée.

Réciproquement, si K vérifie les conditions demandées. Soit (u_n) une suite dans K. Comme K est compact pour la topologie usuelle, elle admet une sous-suite convergente vers $l \in K$ pour la topologie usuelle. Quitte à extraire on suppose que $|u_n - l| \to 0$. Si $l = 0$, c'est aussi une limite pour la distance SNCF. Si $l \neq 0$, il existe un rang à partir duquel $|u_n - l| < \frac{|l|}{2}$, et on a donc également $|u_n| > \frac{|l|}{2}$. Comme par hypothèse K ne prend qu'un nombre fini d'arguments sur $\left\{|z| > \frac{|l|}{2}\right\}$, et que l'argument est continu mod 2π, l'argument stationne à partir d'un certain rang, et on a alors $d(u_n,l) = |u_n - l| \to 0$.

Exercice 2 Théorème de la limite simple de Baire

1. a) Si $\omega_f(x_0) = 0$, soit $\varepsilon > 0 = \omega_f(x_0)$. Il existe V voisinage de x_0 tel que $\forall x, y \in V$ on ait $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. En prenant en particulier $y = x_0$ on obtient la continuité en x_0. Réciproquement si f est continue en x_0. Soit $\varepsilon > 0$ et V un voisinage tel que $\forall y \in V$ on ait $|f(y) - f(x_0)| < \varepsilon$, alors $\forall x, y \in V$ on a $|f(x) - f(y)| < 2\varepsilon$, et donc $\omega_f(x_0) < 2\varepsilon$, d'où $\omega_f(x_0) = 0$.
b) Soit $x_0 \in \Omega_\varepsilon$. Alors il existe V un voisinage de x_0 que l'on peut supposer ouvert tel que $\forall x, y \in V$ on ait $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Mais alors $V \subset \Omega_\varepsilon$, qui est donc ouvert.
c) $C(f) = \{\omega_f = 0\} = \bigcap_p \left\{\omega_f < \frac{1}{p}\right\}$.

2. a) $F_n = \bigcap_{m \geqslant n} \{x \in X \text{ t.q. } |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon\}$ est une intersection d'ensembles qui sont fermés par continuité des f_n, c'est donc un fermé.
b) Par hypothèse $\forall x \ \big(f_n(x)\big)$ converge, elle est donc de Cauchy et $x \in F_n$ pour un certain n. Le théorème de Baire assure alors que l'un des F_n est d'intérieur non vide puisque X est d'intérieur non vide.
c) Soit $W \subset \mathring{F}_n$ un ouvert non vide, $x_0 \in W$. Quitte à restreindre W, par continuité de f_n on peut supposer que $\forall x \in W$ on a $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$. Au total on a donc $\forall x \in W$,

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < 3\varepsilon.$$

Le terme central est $< \varepsilon$ par continuité de f_n, les deux autres le sont car x et x_0 sont dans F_n, donc en passant à la limite $m \to +\infty$ dans $|f_m(y) - f_n(y)|$ on obtient l'inégalité. D'où si $x, y \in W$, $|f(x) - f(y)| < 6\varepsilon$.
d) Si $x \in W$, on a $\omega_f(x) < 6\varepsilon$. Donc on a montré que $\forall \varepsilon > 0$, $\Omega_{6\varepsilon} \neq 0$, donc les ensembles sont bien non vides.

3. On peut appliquer le même raisonnement pour les $f|_U$ où U est un ouvert de X, on obtiendrait un point dans $\Omega_{6\varepsilon} \cap U$. Ainsi, les Ω_ε sont denses car ils rencontrent tout ouvert.

4. Par le théorème de Baire $C(f) = \bigcap \Omega_{\frac{1}{p}}$ est une intersection dénombrable d'ouverts denses, qui est donc dense également.

Exercice 3 Les Espaces Flimsy

1. a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R} - \{x\}$ n'est pas connexe car pas convexe. Donc $\mathbb{R}$ est 1-flimsy.
b) $\forall \theta \in S^1$, $S^1 - \{\theta\} \simeq \mathbb{R}$ est connexe, et $\forall \theta \neq \phi$, $s^1 - \{\theta, \phi\}$ n'est pas connexe pour les mêmes raisons qu'en a), donc S^1 est 2-flimsy.
c) C'est immédiat.

2. a)

$$\begin{aligned}(U \cup U_1 \cup U_2) \cup (V \cap U_3) &\supset (U \cup U_1 \cup U_2 \cup U_3) \cap (U \cup V \cup U_1 \cup U_2)\\ &\supset (U \cup \{x, y\}^c) \cap (\{u_1, u_2\}^c \cup U_1 \cup U_2).\end{aligned}$$

$x \in U$ donc le premier ensemble contient $\{y\}^c$, et $u_i \in U_i$ donc le second aussi. Ainsi $(U \cup U_1 \cup U_2)$ et $(V \cap U_3)$ recouvrent $\{y\}^c$.

$$\begin{aligned}(U \cup U_1 \cup U_2) \cap (V \cap U_3) &\subset (U \cap V) \cup (U_1 \cup U_2 \cup U_3)\\ &\subset \{x, y, u_1, u_2\}.\end{aligned}$$

Comme $x \notin V$, et $u_1, u_2 \notin U_3$, on a finalement $(U \cup U_1 \cup U_2) \cap (V \cap U_3) \subset \{y\}$, et donc les restrictions à $\{y\}^c$ sont disjointes. Les deux ensembles sont des ouverts qui partitionnent $\{y\}^c$, qui est connexe, et $U \cup U_1 \cup U_2 \neq \emptyset$, donc $V \cap U_3 \cap \{y\}^c = \emptyset$.
b) Si $y \notin U$, alors $y \in V$, et on a de même on a $U \cap U_3 \cap \{x\}^c = \emptyset$. Ainsi,

$$U_3 \cap \{x, y\}^c = (U_3 \cap U \cap \{x, y\}^c) \cup (U_3 \cap V \cap \{x, y\}^c) \subset (U_3 \cap U \cap \{x\}^c) \cup (U_3 \cap V \cap \{y\}^c) = \emptyset,$$

ce qui est absurde. Donc $y \in U$.

c) D'après la question précédente, $y \notin V$, donc $V \cap U_3 = \emptyset$, et par conséquent $U_3 \subset U$.

$$\begin{aligned}(U \cup U_1) \cup (V \cap U_2) &\supset (U \cup V \cup U_1) \cap (U \cup U_1 \cup U_2)\\ &\supset (\{u_1, u_2\}^c \cup U_1) \cap (U_1 \cup U_2 \cup U \cup U_3)\\ &\supset (\{u_1, u_2\}^c \cup U_1) \cap (\{x, y\}^c \cup U).\end{aligned}$$

Le premier ensemble contient $\{u_2\}^c$ puisque $u_1 \in U_1$, le second aussi puisque $x, y \in U$.

$$\begin{aligned}(U \cup U_1) \cap (V \cap U_2) &\subset (U \cap V \cap U_2) \cup (U_1 \cap U_2 \cap V)\\ &\subset (\{u_1, u_2\} \cap U_2) \cup (\{x, y\} \cap V).\end{aligned}$$

Le premier ensemble est inclu dans $\{u_2\}$ car $u_1 \notin U_2$, et le second est vide car $x, y \notin V$. Ainsi, $(U \cup U_1)$ et $(V \cap U_2)$ qui sont des ouverts induisent une partition de $\{u_2\}^c$, qui est connexe. L'un des deux est donc vide. Comme le premier est non vide puisqu'il contient x, on a $V \cap U_2 \cap \{u_2\}^c = \emptyset$.
d) On applique le même résultat avec u_1 et $U \cup U_2$ et $V \cap U_1$. Maintenant on a

$$\begin{aligned}V \cap \{u_1, u_2\}^c &\subset (V \cap U_1 \cap \{u_1, u_2\}^c) \cup (V \cap U_2 \cap \{u_1, u_2\}^c) \cup (V \cap (U_3 \cup \{x, y\}) \cap \{u_1, u_2\}^c)\\ &\subset\subset (V \cap U_1 \cap \{u_1\}^c) \cup (V \cap U_2 \cap \{u_2\}^c) \cup (V \cap (U_3 \cup \{x, y\}))\\ &\subset \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset = \emptyset.\end{aligned}$$

Le dernier ensemble est vide car on a montré que $V \cap U_3 = \emptyset$ et $x, y \notin V$, les deux autres le sont par la question précédente. Ona donc montré que $V \cap \{u_1, u_2\}^c = \emptyset$. L'ensemble $\{x, y\}$ est donc connexe, ce qui est absurde car l'espace est 2-flimsy.
e) Si l'espace avait plus de 3 composantes connexes, on purrait le partitionner en trois clopen : Soit C_1 clopen, C_1^c l'est aussi, et l'un des deux ne saurait être connexe, sinon ce seraient les deux composantes connexes, on peut donc partitionner l'un des deux.

3. a) $C_2(t)$ est un clopen de $\{x, t\}^c$, donc l'un des deux ensembles $C_2(t) \cup \{x\}$ et $C_2(t)$, qui sont les deux ensembles dont la restriction donne $C_2(t)$ est ouvert, de même l'un des deux est fermés. Ce ne saurait être le même auquel cas ce serait un clopen de $\{t\}^c$, qui est connexe. Si $C_2(t) \cup \{x\}$ n'est pas connexe, il a deux composantes connexes $\{x\}$ et $C_2(t)$, et $C_2(t)$ est donc un clopen de $C_2(t) \cup \{x\}$. Ainsi, $C_2(t)$ est ouvert dans $\{t\}^c$: soit il l'est, soit il est ouvert dans $C_2(t) \cup \{x\}$ qui lui l'est. De même il est fermé. Ainsi $C_2(t)$ est un clopen dans $\{t\}^c$ est c'est absurde. Donc $C_2(t) \cup \{x\}$ est connexe.

$$\begin{aligned}D^c &= C_1(s)^c \cup C_1(t)^c\\ &= (C_2(s) \cap \{x, s\}^c) \cup \{x, s\} \cup (C_2(t) \cap \{x, t\}^c) \cup \{x, t\}\\ &C_2(s) \cup C_2(t) \cup \{x\} \text{ par double inclusion.}\end{aligned}$$

$D^c = (C_2(t) \cup \{x\}) \cup (C_2(s) \cup \{x\})$ est l'union de deux parties connexes qui s'intersectent, c'est donc connexe également.
b) D^c est connexe par la question précédente, donc puisqu'il est partitionné par les ouverts $\tilde{U}$ et $\tilde{V}$ il est inclu dans l'un des deux. On suppose qu'il est inclu dans $\tilde{U}$. Si $z \in \tilde{V}$, soit $z = u$ ou v et donc $z \in D$, ou alors $z \in \{u, v\} \cap \tilde{V}$, et donc $z \notin \tilde{U}$, puis $z \notin D^c$, *i.e.* $z \in D$.

c)

$$\begin{aligned}(V \cap \tilde{V} \cap \{u,v\}^c) \cup (U \cap \tilde{V} \cap \{u,v\}^c) &= \tilde{V} \cap \{u,v\}^c \cap (U \cup V) \\ &= \tilde{V} \cap D \cap \{u,v\}^c \cap (U \cup V) \\ &= \tilde{V} \cap D \cap \{u,v\}^c \\ &= \tilde{V} \cap \{u,v\}^c \neq \emptyset.\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}(U \cup \tilde{U}) \cup (V \cap \tilde{V}) &\supset (U \cup V \cup \tilde{U}) \cap (U \cup \tilde{U} \cup \tilde{V}) \\ &\supset (D \cup \tilde{U}) \cap (U \cup \{u,v\}^c) \\ &\supset (D \cup \tilde{V} \cup \tilde{U}) \cap (U \cup \{u,v\}^c) \\ &\supset (D \cup \{u,v\}^c) \cap (U \cup \{u,v\}^c)\end{aligned}$$

Chacun des deux ensembles contient bien $\{v\}^c$ pusique $u \in D$ et $u \in U$.

$$\begin{aligned}(U \cup \tilde{U}) \cap (V \cap \tilde{V}) &\subset (U \cap V \cap \tilde{V}) \cup (V \cap \tilde{U} \cap \tilde{V}) \\ &\subset (D^c \cap \tilde{V}) \cup (V \cap \{u,v\})\end{aligned}$$

Le premier ensemble est vide puisque $\tilde{V} \subset D$, le second est inclu dans $\{v\}$ puisque $u \notin V$. Les deux ensembles sont des ouverts qui induisent une partition de $\{v\}^c$ qui est connexe. Aucun des deux n'est vide. C'est absurde car ce dernier est connexe. Ainsi, D est connexe.

4. a) Par application de la question précédente dans $\{x\}^c$ où l'on retranche $\{y,s\}$ ou $\{y,t\}$, D est un clopen de $\{x,t,s\}^c$. De même en le voyant comme $\{y\}^c$ où l'on enlève $\{x,s\}$ ou $\{x,t\}$, D est un clopen de $\{y,t,s\}^c$.

b) On peut écrire $D = F_x \cap \{x,s,t\}^c = Y_x \cap \{x,s,t\}^c = F_y \cap \{y,s,t\}^c = U_y \cap \{y,s,t\}^c$ où F_x, F_y sont des fermés de X et U_x, U_y des ouverts. Mais alors $D = F_x \cap F_y \cap \{s,t\}^c$ est d'une part fermé dans $\{s,t\}^c$, et ouvert d'autre part car $D = U_x \cap U_y \cap \{s,t\}^c$. C'est donc un clopen non trivial : il est non vide car c'est une composante connexe, et son complémentaire est non vide puisqu'il contient x. Ainsi, $\{s,t\}^c$ n'est pas connexe et X n'est pas flimsy.