# Le « corps des normes » de certaines extensions algébriques de corps locaux

suivi de

# Extensions algébriques et corps des normes des extensions APF des corps locaux

Jean-Marc Fontaine Jean-Pierre Wintenberger

**Intention du typographe (B.S.).** L'objectif de ce document est de fournir une version électronique moderne des notes [FW79a ; FW79b], en les réunissant autant qu'il est raisonnable. Il s'agit de produire un document mathématique lisible et continu, et non de respecter avec fidélité la mise en page initiale. Une conséquence inévitable de la réunion des deux notes est que l'organisation des références est chamboulée par rapport à l'originale ; pour cette raison, la bibliographie suit une logique complètement différente (et certainement anachronique). Les deux résumés sont recopiés dès le début pour maintenir l'illusion de continuité. p.367

## Résumés.

**[FW79a] Le « corps des normes » de certaines extensions algébriques de corps locaux.**

Soit $K$ un corps local à corps résiduel parfait de caractéristique $p \neq 0$. Si $L$ est une extension « arithmétiquement profinie » de $K$ (c'est le cas si $L/K$ est galoisienne totalement ramifiée, à groupe de Galois un groupe de Lie $p$-adique de dimension $\geqq 1$), la limite projective des groupes multiplicatifs des extensions finies intermédiaires (les applications de transition étant les normes) s'identifie au groupe multiplicatif d'un corps local $X_K(L)$ de caractéristique $p$. Des applications seront données dans une prochaine Note.

*Let $K$ be a local field with perfect residue field of characteristic $p \neq 0$. If $L$ is a suitable algebraic extension of $K$ (e. g., if $L/K$ is Galois, totally ramified, with Galois group a $p$-adic Lie group of dimension $\neq 0$), we construct a local field $X_K(L)$ of characteristic $p$, whose multiplicative group can be identified with the projective limit of the multiplicative groups of the finite extensions of $K$ contained in $L$. Applications will be given in a forthcoming note.*

**[FW79b] Extensions algébriques et corps des normes des extensions APF des corps locaux.**

Ce travail est le prolongement d'une Note antérieure [FW79a] dont on conserve les hypothèses et les notations. Les démonstrations seront publiées ailleurs [Win78]. Si $L$ est une extension APF infinie d'un corps local $K$, l'étude des extensions algébriques séparables de $L$ se ramène à celle des extensions algébriques séparables de $X_K(L)$. Si $L/K$ est strictement APF et si $U$ désigne le $\mathbf{Z}_p$-module des unités fondamentales du complété de $L$, le groupe $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(\mathbf{Q}_p, U)$ s'identifie au groupe des unités fondamentales du complété de la clôture radicielle de $X_K(L)$.

*This work is a continuation of a previous Note [FW79a] and we keep the same hypotheses and notation. Proofs will be given elsewhere [Win78]. Let $L$ be an infinite APF extension of a local field $K$ : there is an equivalence between the category of separable algebraic extensions of $L$ and the category of separable algebraic extensions of $X_K(L)$. If $L/K$ is strictly APF and if $U$ denotes the $\mathbf{Z}_p$-module of the fundamental units of the completion of $L$, the group $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(\mathbf{Q}_p, U)$ can be identified with the group of the fundamental units of the completion of the perfection of $X_K(L)$.*

Dans cette Note, $p$ est un nombre premier fixé et tous les corps locaux considérés ont un corps résiduel parfait de caractéristique $p$.

## 1. Extensions arithmétiquement profinies.

1.1. Si $K$ est un corps local, si $M$ est une extension galoisienne de $K$ et si $G = \mathrm{Gal}(M/K)$, on note $(G^u)_{u\in\mathbf{R},u\geqq -1}$ les groupes de ramification en numérotation supérieure [Ser68, rem. 1, p. 83]. Les $G^u$ sont des sous-groupes fermés invariants de $G$ et forment une filtration de $G$ décroissante, exhaustive (i. e., $G^{-1} = G$) et séparée ; le groupe d'inertie est $G^0$.

Si $L$ est une extension galoisienne de $K$ contenue dans $M$ et si $H = \mathrm{Gal}(M/L)$, on a $(G/H)^u = G^uH/H$, pour tout $u \geqq -1$ [Ser68, prop. 14, p. 81].

1.2. Définitions. — Soit $L$ une extension algébrique séparable d'un corps local $K$ et soit $M$ une extension galoisienne de $K$ contenant $L$. Soient $G = \mathrm{Gal}(M/K)$ et $H = \mathrm{Gal}(M/L)$. Nous disons que l'extension $L/K$ est arithmétiquement profinie (ou APF) si, pour tout $u \geqq -1$, le groupe $G^uH$ est ouvert dans $G$ (d'après le numéro précédent, cela ne dépend pas du choix de $M$).

Si $L/K$ est APF, on pose $H^0 = H \cap G^0$ et on définit une bijection $\psi_{L/K}$ de $[-1, +\infty)$ sur lui-même, croissante et continue, en posant

$$\psi_{L/K}(u) = \int_0^u (G^0 : H^0G^v)dv$$

[en convenant que $(G^0 : H^0G^v) = 1$ si $-1 < v < 0$]. Nous dirons que l'extension $L/K$ est *strictement* APF si

$$\liminf_{u\to+\infty} \frac{\psi_{L/K}(u)}{(G^0 : H^0G^u)} > 0.$$

Enfin nous notons $i(L/K)$ la borne supérieure des $i \geqq -1$ tels que $G^iH = G$ ; elle ne dépend pas du choix de $M$.

1.3. *Exemples.* —

(a) toute extension finie séparable d'un corps local est strictement APF ;

(b) toute extension galoisienne d'un corps local $K$, dont le groupe de Galois est un groupe de Lie $p$-adique et dont le groupe d'inertie est ouvert (en particulier, toute extension abélienne, à extension résiduelle finie, d'une extension finie de $\mathbf{Q}_p$) est strictement APF : si $K$ est p.368 de caractéristique 0, cela se déduit facilement d'un résultat de Sen [Sen72] ; si $K$ est de caractéristique $p$, cela se déduit d'un analogue du théorème de Sen [Win79] ;

(c) si $K \subset K' \subset L$, avec $L/K$ algébrique séparable et $K'/K$ finie, $L/K$ est (strictement) APF si et seulement si $L/K'$ l'est ;

(d) si $K \subset L \subset L'$, avec $L'/K$ algébrique séparable et $L'/L$ finie, $L'/K$ est (strictement) APF si et seulement si $L/K$ l'est ;

(e) si $K \subset L \subset M$ et si $M/K$ est (strictement) APF, $L/K$ l'est.

1.4. Définition. — Soit $L$ une extension finie non triviale d'un corps local $K$ et soit $i$ un nombre rationnel $> 0$. Soient $M$ une extension galoisienne de $K$ contenant $L$, $G = \mathrm{Gal}(M/K)$, $H = \mathrm{Gal}(M/L)$. Nous disons que l'extension $L/K$ est *élémentaire de niveau* $i$ si $G^iH = G$ et $G^{i+\varepsilon}H = H$, pour tout $\varepsilon > 0$. Cette définition ne dépend pas du choix de $M$ et implique que $L/K$ est une extension totalement ramifiée de degré une puissance de $p$.

1.5. *La tour des extensions élémentaires d'une extension APF.* — Nous disons qu'une extension algébrique séparable $L$ d'un corps local $K$ est *ind-élémentaire* s'il existe $m \in \mathbf{N}^* \cup \{+\infty\}$, une suite strictement croissante $(i_n)_{0<n<m}$ de nombres rationnels $> 0$ et des extensions finies $(K_n)_{0 \leqq n \leqq m}$ de $K$ vérifiant $K_n \subset K_{n+1}$ et $L = K_m = \bigcup K_n$ tels que :

(a) l'extension $K_0/K$ est non ramifiée ;

(b) l'extension $K_1/K_0$ est totalement ramifiée de degré premier à $p$ ;

(c) si $0 < n < m$, l'extension $K_{n+1}/K_n$ est élémentaire de niveau $i_n$.

Lorsqu'il en est ainsi, $m$, la suite des $i_n$ et la tour des $K_n$ sont uniquement déterminés.

On montre facilement que toute extension APF est ind-élémentaire et que, si $L/K$ est ind-élémentaire infinie, elle est APF (resp. strictement APF) si et seulement si

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i_{n+1} - i_n}{[K_n : K_0]} = +\infty$$

(resp. s'il existe $c > 0$ tel que $i_n/[K_{n+1} : K_0] > c$, pour tout $n \geqq 1$).

## 2. Le corps $X_K(L)$.

2.1. Si $L$ est une extension algébrique séparable d'un corps $K$, nous notons $\mathcal{E}_{L/K}$ l'ensemble ordonné filtrant des extensions finies de $K$ contenues dans $L$ et nous posons

$$X_K^*(L) = \varprojlim_{E \in \mathcal{E}_{L/K}} E^*,$$

l'application de transition de $E'^*$ à $E^*$ (si $E \subset E'$) étant la norme de $E'$ à $E$, que l'on note $\mathrm{N}_{E'/E}$.

On pose $X_K(L) = X_K^*(L) \cup \{0\}$. Se donner un élément $\alpha \in X_K(L)$ revient donc à se donner une famille $(\alpha_E)_{E \in \mathcal{E}_{L/K}}$ avec $\alpha_E \in E$ et $\mathrm{N}_{E'/E}(\alpha_{E'}) = \alpha_E$ si $E \subset E'$.

2.2. Dans toute la suite de ce paragraphe, $L$ est une extension APF infinie d'un corps local $K$. Sur $X_K(L)$, qui est déjà muni d'une multiplication, on peut alors définir une addition :

Proposition. — *Soient $\alpha = (\alpha_E)_{E \in \mathcal{E}_{L/K}}$ et $\beta = (\beta_E)_{E \in \mathcal{E}_{L/K}}$ des éléments de $X_K(L)$. Pour tout $E \in \mathcal{E}_{L/K}$, les $\mathrm{N}_{E'/E}(\alpha_{E'} + \beta_{E'})$ convergent (suivant le filtre des sections de $\mathcal{E}_{L/E}$) vers un élément $\gamma_E \in E$ et $\alpha + \beta = (\gamma_E)_{E \in \mathcal{E}_{L/K}}$ est un élément de $X_K(L)$.*

2.3. Soit $K_1$ l'extension maximale modérément ramifiée de $K$ contenue dans $L$. C'est une extension finie de $K$ et le corps résiduel $k$ de $L$ est aussi celui de $K_1$. Soit $x \in k$ ; si $E \in \mathcal{E}_{L/K_1}$, $[E : K_1]$ est une puissance de $p$ et on note $x_E$ le représentant de Teichmüller, dans $E$, de la racine $[E : K_1]$-ième de $x$. Si $E \subset E'$, On a $x_E = x_{E'}^{[E':E]} = \mathrm{N}_{E'/E}(x_{E'})$ et, comme $\mathcal{E}_{L/K_1}$ est cofinal dans $\mathcal{E}_{L/K}$, $(x_E)_{E \in \mathcal{E}_{L/K_1}}$ définit un élément de $X_K(L)$ que nous notons $f_{L/K}(x)$. p.369

Enfin, si $v$ est la valuation de $K_1$ normalisée par $v(K_1^*) = \mathbf{Z}$ et si $\alpha = (\alpha_E)_{E \in \mathcal{E}_{L/K}} \in X_K(L)$, nous posons $v(\alpha) = v(\alpha_{K_1})$.

2.4. Théorème. — *Muni de l'addition et de la multiplication précédemment définies, $X_K(L)$ est un corps local de caractéristique $p$ et $v$ est une valuation de $X_K(L)$ vérifiant $v(X_K^*(L)) = \mathbf{Z}$. L'application $f_{L/K}$ est un plongement du corps résiduel $k$ de $L$ dans $X_K(L)$ et induit un isomorphisme de $k$ sur le corps résiduel de $X_K(L)$.*

2.5. *Remarque.* — Si $K' \in \mathcal{E}_{L/K}$, $\mathcal{E}_{L/K}$ est cofinal dans $\mathcal{E}_{L/K}$ et les corps $X_K(L)$ et $X_{K'}(L)$ s'identifient. Si $p^r$ désigne la plus grande puissance de $p$ qui divise l'indice de ramification de l'extension $K'/K$, et si $\sigma$ désigne le Frobenius absolu sur $k$, on a $f_{L/K'} = f_{L/K} \circ \sigma^r$.

## 3. L'anneau $\mathrm{Nor}_K(L)$.

Nous allons maintenant donner une autre description de $X_K(L)$ et en déduire la proposition 2.2 et le théorème 2.4.

3.1. Lemme. — *Soit $E'$ une extension finie séparable, non triviale, totalement ramifiée, d'un corps local $E$ et soit $i = i(E'/E)$ (cf. n°1.2). Soient $A'$ (resp. $A$) l'anneau des entiers de $E'$ (resp. $E$), $\mathrm{N} : A' -> A$ la norme et $v$ la valuation de $E$ normalisée par $v(E^*) = \mathbf{Z}$. Alors :*

*(i) si $\alpha, \beta \in A'$, on a $v(\mathrm{N}(\alpha+\beta) - \mathrm{N}(\alpha) - \mathrm{N}(\beta)) \geqq (p-1)i/p$ ;*

*(ii) si $a \in A$, il existe $\alpha \in A'$ tel que $v(\mathrm{N}(\alpha) - a) \geqq (p-1)i/p$.*

*Démonstration.* — Par dévissage, on se ramène au cas où l'extension est élémentaire de niveau $i$. Quitte à composer avec une extension modérément ramifiée, on peut supposer $E'/E$ galoisienne et, de nouveau par dévissage, on se ramène au cas où $E'/E$ est cyclique de degré $p$. L'assertion (i) résulte alors facilement de ce que, pour tout $\gamma \in A'$, $v(\mathrm{Tr}_{E'/E}(\gamma)) \geqq (p-1)i/p$. Pour montrer (ii) on remarque que, si $\pi'$ est une uniformisante de $A'$ et si $\pi = \mathrm{N}(\pi')$, $a$ peut s'écrire $a = \sum_{j=0}^{\infty} x_j^p \pi^j$, avec les $x_j \in A$, et que $\alpha = \sum x_j \pi'^j$ convient.

3.2. Dans toute la suite, $L$ est une extension APF d'un corps local $K$, on note $K_1$ l'extension maximale modérément ramifiée de $K$ contenue dans $L$ et on pose $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{L/K_1}$.

Si $E \in \mathcal{E}$, on pose $i_E = i(L/E)$, on note $A_E$ l'anneau des entiers de $E$, $\mathfrak{m}_E$ son idéal maximal, $r_E$ le plus petit entier $\geqq (p-1)i_E/p$ et $\overline{A}_E$ l'anneau $A_E/\mathfrak{m}_E^{r_E}$.

Si $E, E' \in \mathcal{E}$ vérifient $E \subset E'$, il résulte du lemme 3.1 que la norme induit, par passage aux quotients, un homomorphisme surjectif de l'anneau $\overline{A}_{E'}$ sur $\overline{A}_E$. On note $\mathrm{Nor}_K(L)$ la limite projective des $\overline{A}_E$, pour $E \in \mathcal{E}$.

3.3. Il est facile de voir que $\mathrm{Nor}_K(L)$ est l'anneau des entiers d'un corps local de caractéristique $p$, dont le corps résiduel s'identifie à celui de $K_1$ : on choisit, pour chaque $E \in \mathcal{E}$, une uniformisante $\pi_E$ de $E$, de manière que, si $E \subset E'$, $\mathrm{N}_{E'/E}(\pi_{E'})$ et $\pi_E$ aient même image $\overline{\pi}_E$ dans $\overline{A}_E$ [cela est possible, en vertu du (ii) du lemme 3.1 et de l'existence de la tour des $K_n$, (cf. n°1.5), qui est cofinale dans $\mathcal{E}$]. Alors $\pi = (\overline{\pi}_E)_{E\in\mathcal{E}}$ est une uniformisante de $\mathrm{Nor}_K(L)$ et tout $\alpha \in \mathrm{Nor}_K(L)$ s'écrit, de manière unique, sous la forme $\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} x_j \pi^j$, avec les $x_j \in k$ : si, pour tout $x \in k$, on note $[x]$ son représentant de Teichmüller dans $K_1$ et, si l'on pose $s_E = [E : K_1]^{-1}$, l'image canonique de $\alpha$ dans $\overline{A}_E$ est l'image de l'élément $\sum [x_j^{s_E}] \pi_E^j$ de $A_E$.

3.4. La proposition 2.2 et le théorème 2.4 se déduisent alors facilement du résultat suivant :

Proposition. — *Soit $A_K(L)$ l'ensemble des $\alpha = (\alpha_E)_{E\in\mathcal{E}} \in X_K(L)$ tels que $\alpha_{K_1} \in A_{K_1}$. L'application $\xi$, qui à tout $\alpha \in A_K(L)$ associe $(\overline{\alpha}_E)_{E\in\mathcal{E}}$ (où $\overline{\alpha}_E$ désigne l'image de $\alpha_E \in A_E$ dans $\overline{A}_E$) est une bijection de $A_K(L)$ sur* $\mathrm{Nor}_K(L)$. p.370

*Démonstration.* — Il suffit de construire l'application réciproque $\eta$ : si

$$a = (a_E)_{E\in\mathcal{E}} \in \mathrm{Nor}_K(L)$$

on choisit, pour tout $E$, un relèvement $\widehat{a}_E$ de $a_e$ dans $A_E$. Il résulte facilement d'une généralisation aux extensions non nécessairement galoisiennes d'un théorème de Hasse [Ser68, prop. 8, p. 99] que, pour $E$ fixé, les $\mathrm{N}_{E'/E}(\widehat{a}_{E'})$ convergent (suivant le filtre des sections de $\mathcal{E}_{L/E}$) vers un élément $\alpha_E$ qui ne dépend pas du choix des relèvements. Alors $\eta(a) = (\alpha_E)_{E\in\mathcal{E}}$.

3.5. *Remarque.* — L'application $\xi$ est, en fait, un isomorphisme continu de l'anneau des entiers de $X_K(L)$ sur $\mathrm{Nor}_K(L)$.

---

Dans ce qui suit [1], $K$ est un corps local. p.441

## 4. Propriétés fonctorielles de $X_K(L)$.

4.1. Soient $L$ et $L'$ deux extensions APF infinies de $K$. Posons $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{L/K}$ et $\mathcal{E}' = \mathcal{E}_{L'/K}$ (cf. 2.1). Soit $\tau : L \to L'$ un $K$-plongement fini séparable. Notons $\mathcal{E}'_\tau$ l'ensemble des $E' \in \mathcal{E}'$ tels que l'application canonique de $\tau L \otimes_{\tau L\cap E'} E'$ dans $L'$ soit un isomorphisme. On définit une application $X_K(\tau) : X_K(L) \to X_K(L')$ en associant à $(\alpha_E)_{E\in\mathcal{E}} \in X_K(L)$ l'élément $(\beta_{E'})_{E'\in\mathcal{E}'}$ défini par

$$\beta_{E'} = \tau\alpha_{\tau^{-1}E'} \text{ si } E' \in \mathcal{E}'_\tau$$

[si $E', E'' \in \mathcal{E}'_\tau$, on voit que, pour tout $\alpha \in \tau^{-1}E''$, $\mathrm{N}_{E''/E'}(\tau\alpha) = \tau\mathrm{N}_{\tau^{-1}E''/\tau^{-1}E'}(\alpha)$, et on a donc bien $\mathrm{N}_{E''/E'}(\beta_{E''}) = \beta_{E'}$ ; on a bien défini un élément de $X_K(L')$ car $\mathcal{E}'_\tau$ est cofinal dans $\mathcal{E}'$].

4.2. Proposition. — *L'application $X_K(\tau)$ est un plongement de $X_K(L)$ dans $X_K(L')$ et identifie $X_K(L')$ à une extension finie séparable de $X_K(L)$ dont le degré est $[L' : \tau L]$.*

4.3. *Remarques.* —

(a) En fait $X_K$ est un foncteur *fidèle* de la catégorie dont les objets sont les extensions APF infinies de $K$ et les flèches les $K$-plongements finis séparables dans la catégorie dont les objets sont les corps locaux de caractéristique $p$ et les flèches les plongements finis séparables.

(b) En particulier, si $L$ est une extension APF infinie *galoisienne* de $K$, $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ opère par fonctorialité sur $X_K(L)$. Notons $\mathcal{G}$ le groupe des automorphismes continus de $X_K(L)$ et soit $i_\mathcal{G}$ la fonction d'ordre de la filtration de $\mathcal{G}$ [Sen69] : on a donc [en notant $\pi$ une uniformisante de $X_K(L)$ et $v$ la valuation de $X_K(L)$ normalisée par $v(\pi) = 1$] :

$$i_\mathcal{G}(g) = \begin{cases} -1 & \text{si } g \text{ n'opère pas trivialement sur le corps résiduel,} \\ v\left(\dfrac{g\pi}{\pi} - 1\right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $\mathcal{G}$ est séparé et complet pour la topologie définie par la filtration et $G$ s'identifie à un sous-groupe fermé de $\mathcal{G}$. La filtration de $G$ par les groupes de ramification « se lit » sur $X_K(L)$ : si $\varphi$ désigne la fonction réciproque de $\psi_{L/K}$ (cf. 1.2) et si, pour tout nombre réel $i \geqq -1$, on pose $G_i = G^{\varphi(i)}$, on a p.442

$$G_i = G \cap \mathcal{G}_i = \{g \in G \mid i_\mathcal{G}(g) \geqq i\}.$$

1. Texte original : « Dans toute cette Note, ... »

4.4. Dans toute la suite, $L$ est une extension APF infinie de $K$. Pour toute extension algébrique séparable $M$ de $L$, nous notons $X_{L/K}(M)$ la limite inductive des $X_K(L')$ pour $L' \in \mathcal{E}_{M/L}$.

On peut considérer, de manière évidente, $X_{L/K}$ comme un foncteur de la catégorie des extensions algébriques séparables de $L$ [les flèches étant les $L$-plongements algébriques séparables] dans celle des extensions algébriques séparables de $X_K(L)$ [les flèches étant les $X_K(L)$-plongements algébriques séparables]. Ce foncteur induit une *équivalence* de ces deux catégories. Autrement dit :

4.5. Proposition. — *Si $M_1$ et $M_2$ sont deux extensions algébriques séparables de $L$, l'ensemble des $L$-plongements algébriques séparables de $M_1$ dans $M_2$ s'identifie à celui des $X_K(L)$-plongements algébriques séparables de $X_{L/K}(M_1)$ dans $X_{L/K}(M_2)$. En outre, si $X'$ est une extension algébrique séparable de $X_K(L)$, il existe une extension algébrique séparable $M$ de $L$ et un $X_K(L)$-isomorphisme de $X_{L/K}(M)$ sur $X'$.*

4.6. Corollaire. — *Soit $\overline{K}$ une clôture séparable de $K$ contenant $L$. Alors $\overline{X} = X_{L/K}(\overline{K})$ est une clôture séparable de $X_K(L)$ et $\mathrm{Gal}(\overline{K}/L)$ s'identifie à $\mathrm{Gal}(\overline{X}/X_K(L))$.*

4.7. *Remarque.* — Si, de plus, $L/K$ est galoisienne, $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ s'identifie au groupe des automorphismes de $\overline{X}$ qui laissent stable $X_K(L)$ et induisent sur $X_K(L)$ un automorphisme qui est dans l'image de $\mathrm{Gal}(L/K)$. En particulier, $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ est une extension de $\mathrm{Gal}(L/K)$ par $\mathrm{Gal}(\overline{X}/X_K(L))$.

4.8. Proposition. — *Soit $M$ une extension algébrique séparable de $L$. L'extension $M/K$ est APF si et seulement si $X_{L/K}(M)/X_K(L)$ l'est. S'il en est ainsi, $X_K(M)$ s'identifie à $X_{X_K(L)}(X_{L/K}(M))$.*

## 5. Le corps $R(E)$. [2]

5.1. Si $E$ est un corps valué complet, à corps résiduel parfait de caractéristique $p$, on pose

$$R^*(E) = \varprojlim_{n\in\mathbf{N}} E_n^* \text{ où } E_n^* = E^*,$$

la flèche de $E_{n+1}^*$ dans $E_n^*$ étant l'élévation à la puissance $p$-ième, et $R(E) = R^*(E) \cup \{0\}$. Un élément $x \in R(E)$ peut donc être considéré comme une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $E$ vérifiant $x_{n+1}^p = x_n$. On définit une addition dans $R(E)$ en posant, si $x, y \in R(E)$,

$$(x+y)_n = \lim_{m\to+\infty} (x_{n+m} + y_{n+m})^{p^m}.$$

Si $v$ est la valuation de $E$, on pose $v_R(x) = v(x_0)$, pour tout $x \in R(E)$.

5.2. Proposition. — *Muni de ces deux lois, $R(E)$ est un corps parfait de caractéristique $p$ et $v_R$ est une valuation pour laquelle il est complet. Son corps résiduel s'identifie à celui de $E$.*

2. Ce corps joue un grand rôle dans l'étude de certaines représentations galoisiennes de corps locaux, cf. [Fon77].

5.3. *Remarques.* —

(a) Si $E$ est un corps local, $v_R$ est triviale et $R(E)$ s'identifie au corps résiduel de $E$.

(b) Si $E$ est de caractéristique $p$, l'application $x \mapsto x_0$ identifie $R(E)$ à un sous-corps fermé de $E$ : c'est le plus grand sous-corps parfait de $E$. p.443

(c) Supposons $E$ de caractéristique 0 et notons $A_E$ (resp. $A_{R(E)}$) l'anneau des entiers de $E$ [resp. $R(E)$] et $k$ le corps résiduel de $E$. L'application $v_E : A_{R(E)} \to A_E/pA_E$, qui à $x$ associe l'image de $x_0$, est un homomorphisme de $k$-algèbres. Par la propriété universelle des vecteurs de Witt, il lui correspond un homomorphisme $\theta_E$ de la $W(k)$-algèbre $W\big(A_{R(E)}\big)$ des vecteurs de Witt à coefficients dans $A_{R(E)}$ dans $A_E$.

5.4. Dans la fin de cette Note, $L$ est une extension *strictement* APF infinie de $K$ (cf. 1.2) et $\widehat{L}$ est le complété de $L$. On note $K_1$ l'extension maximale modérément ramifiée de $K$ contenue dans $L$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des $E \in \mathcal{E}_{L/K_1}$ tels que le degré $q^E$ de $E/K_1$ soit divisible par $p^n$.

5.5. PROPOSITION. —

*(a) Pour tout $\alpha = (\alpha_E)_{E \in \mathcal{E}_{L/K}} \in X_K(L)$ et tout $n \in \mathbf{N}$, la famille $(\alpha_E^{p^{-n}q^E})_{E \in \mathcal{E}_n}$ converge (suivant le filtre des sections de $\mathcal{E}_n$) vers un élément $x_n \in \widehat{L}$ et $(x_n)_{n \in \mathbf{N}} \in R(\widehat{L})$.*

*(b) L'application de $X_K(L)$ dans $R(\widehat{L})$, ainsi définie, est un plongement continu.*

5.6. Cette application nous permet d'identifier $X_K(L)$ à un sous-corps fermé de $R(\widehat{L})$. Le complété $\widehat{X}_K^{\mathrm{r}}(L)$ de la clôture radicielle de $X_K(L)$ s'identifie donc aussi à un sous-corps fermé de $R(\widehat{L})$ et l'anneau de ses entiers $\widehat{A}_K^{\mathrm{r}}(L)$ à un sous-anneau de $A_{R(\widehat{L})}$.

PROPOSITION. — *L'application composée*

$$\widehat{A_K^r}(L) \hookrightarrow A_{R(\widehat{L})} \overset{v_{\widehat{L}}}{\to} A_{\widehat{L}}/pA_{\widehat{L}} = A_L/pA_L$$

*est surjective et, par conséquent, $\widehat{A_K^r}(L) = A_{R(\widehat{L})}$ et $\widehat{X_K^r}(L) = R(\widehat{L})$.*

5.7. COROLLAIRE. — Soit $M$ une extension algébrique séparable de $L$ et soit $\widehat{M}$ son complété.

(a) Si $K$ est de caractéristique $p$, $R(\widehat{M}) = M$ (autrement dit $\widehat{M}$ est parfait).

(b) Si $K$ est de caractéristique 0, l'homomorphisme $\theta_{\widehat{M}} : W\Big(A_{R(\widehat{M})}\Big) \to A_{\widehat{M}}$ est surjectif.

(c) Dans tous les cas, $R(\widehat{M})$ s'identifie au complété de la clôture radicielle de $X_{L/K}(M)$ ; si, de plus, $X_{L/K}(M)$ contient une extension strictement APF de $X_K(L)$ (c'est le cas si $M$ est une clôture séparable de $L$), $R(\widehat{M})$ est aussi le complété de $X_{L/K}(M)$.

5.8. *Remarques.* —

(a) Si $K$ est de caractéristique 0, le noyau de $\theta_{\widehat{M}}$ est l'idéal de $W\Big(A_{R(\widehat{M})}\Big)$ engendré par le noyau de $\theta_{\widehat{L}}$ [comme $R(\widehat{L})$ s'identifie à un sous-corps de $R(\widehat{M})$, $W\Big(A_{R(\widehat{L})}\Big)$ s'identifie à un sous-anneau de $W\Big(A_{R(\widehat{M})}\Big)$] et c'est un idéal principal.

(b) Le corollaire précédent permet de construire un foncteur quasi-inverse $Y_{L/K}$ du foncteur $X_{L/K}$ : soit $X'$ une extension algébrique séparable de $X_K(L)$ et soit $\widehat{X'^{\mathrm{r}}}$ le complété de la clôture radicielle de $X'$ :

(i) Si $K$ est de caractéristique $p$, $L$ est un sous-corps de $\widehat{X}^{\mathrm{r}}(L)$, lequel est contenu dans $\widehat{X'^{\mathrm{r}}}$, et $Y_{L/K}(X')$ est la plus grande extension algébrique séparable de $L$ contenue dans $\widehat{X'^{\mathrm{r}}}$.

(ii) Si $K$ est de caractéristique 0, l'application $\theta_{\widehat{L}}$ nous permet d'identifier $A_{\widehat{L}}$ au quotient de $W\Big(A_{R(\widehat{L})}\Big)$ par le noyau $W^1\Big(A_{R(\widehat{L})}\Big)$ de $\theta_{\widehat{L}}$. Comme $\widehat{A^{\mathrm{r}}_K}(L) = A_{R(\widehat{L})}$, $A_{R(\widehat{L})}$ est un sous-anneau de l'anneau des entiers $\widehat{A'^{\mathrm{r}}}$ de $\widehat{X'^{\mathrm{r}}}$ et $W(\widehat{A'^{\mathrm{r}}})$ contient $W\Big(A_{R(\widehat{L})}\Big)$. L'anneau des entiers du complété $\widehat{Y}_{L/K}(X')$ de $Y_{L/K}(X')$ est le quotient de $W(\widehat{A'^{\mathrm{r}}})$ par l'idéal engendré par $W^1\Big(A_{R(\widehat{L})}\Big)$ et $Y_{L/K}(X')$ est la fermeture algébrique de $L$ dans $\widehat{Y}_{L/K}(X')$.

(c) Notons $Z_{L/K}(M)$ la fermeture algébrique de $R(\widehat{L})$ dans $R(\widehat{M})$ ; alors $Z_{L/K}(M)$ est dense dans $R(\widehat{M})$ et le foncteur $Z_{L/K}$ induit une équivalence entre la catégorie des extensions algébriques séparables de $L$ et celle des extensions algébriques de $R(\widehat{L})$.

p.444

## Références.


[Fon77] J.-M. Fontaine. *Groupes p-divisibles sur les corps locaux.* Astérisque 47-48. Soc. Math. de France, Paris, 1977. URL : `www.numdam.org/item/AST_1977__47-48__1_0/`.

[FW79a] J.-M. Fontaine et J.-P. Wintenberger. “Le « corps des normes » de certaines extensions algébriques de corps locaux”. In : *C. R. Acad. Sc. Paris.* Série A 288.6 (1979), pp. 367-370. URL : `gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k98138170/f383.item`.

[FW79b] J.-M. Fontaine et J.-P. Wintenberger. “Extensions algébriques et corps des normes des extensions APF des corps locaux”. In : *C. R. Acad. Sc. Paris.* Série A 288.8 (1979), pp. 441-444. URL : `gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k98138170/f457.item`.

[Sen69] S. Sen. “On Automorphisms of Local Fields”. In : *Ann. of Maths* 90.1 (1969), pp. 33-46. DOI : `10.2307/1970680`.

[Sen72] S. Sen. “Ramification in $p$-Adic Lie Extensions”. In : *Inv. Math.* 17 (1972), pp. 44-50. URL : `www.eudml.org/doc/142157`.

[Ser68] J.-P. Serre. *Corps locaux.* 2e éd. Hermann, Paris, 1968.

[Win78] J.-P. Wintenberger. “Automorphismes et extensions galoisiennes de corps locaux”. Thèse de 3e cycle. Institut Fourier, Université scientifique et médicale de Grenoble, 1978.

[Win79] J.-P. Wintenberger. “Extensions de Lie et groupes d'automorphismes des corps locaux de caractéristique $p$”. In : *C. R. Acad. Sc. Paris.* Série A 288.9 (1979), pp. 477-479. URL : `gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k9814716j/f17.item`.



*Université scientifique et médicale de Grenoble.*
*Laboratoire de Mathématiques pures associé au C.N.R.S.,*
B.P. n°116, 38402 *Saint-Martin d'Hères.*