

# Réarrangement en optimisation de forme

LU Yan Der, SEGUIN Béranger,  
sous la direction de BONNAILLIE-NOËL Virginie

Exposé de L3, 2016-2017

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>1 Le réarrangement symétrique</b>	<b>3</b>
1.1 Définitions . . . . .	3
1.2 Propriétés élémentaires . . . . .	3
1.3 Premières inégalités . . . . .	6
1.4 Inégalité de FABER-KRAHN . . . . .	8
<b>2 Polarisation</b>	<b>10</b>
2.1 Définitions . . . . .	10
2.2 Propriétés élémentaires . . . . .	11
2.3 Lien avec les réarrangements symétriques . . . . .	13
<b>3 Applications</b>	<b>16</b>
3.1 Quelques rappels . . . . .	16
3.2 Inégalité de PÓLYA-SZEGŐ . . . . .	17
3.3 L'inégalité isopérimétrique classique . . . . .	19
<b>4 Autres réarrangements</b>	<b>24</b>
4.1 Argument classique pour l'inégalité isopérimétrique . . . . .	24
4.2 Généralités . . . . .	25
4.3 Convergence « compétitive » . . . . .	26
<b>Conclusion</b>	<b>30</b>

# Introduction

Une « preuve » classique (due à STEINER) de l'inégalité isopérimétrique (qui dit que le cercle est la figure d'aire maximale pour un périmètre donné) consiste à remarquer qu'on augmente l'aire en rendant une forme convexe (quitte à « renverser les concavités »), puis qu'on augmente l'aire d'une forme convexe en la rendant symétrique par rapport à un axe. On en conclut que la forme optimale (dont ce raisonnement suppose d'avoir déjà établi l'existence) est convexe et symétrique selon tout axe et est donc le cercle.

Si elle n'est pas rigoureusement formulée ainsi, cette preuve suggère une méthode générale pour obtenir des inégalités géométriques : quantifier l'effet de l'ajout de symétries à des ensembles et à des fonctions. Notre objectif sera de généraliser cette méthode pour obtenir des inégalités puissantes (RIESZ, POLYÁ-SZEGŐ, FABER-KRAHN), certaines d'entre elles permettant d'ailleurs d'obtenir l'inégalité isopérimétrique.

Notre présentation suivra les notes du cours *A Short Course on Rearrangement Inequalities* d'ALMUT BURCHARD de l'Université de Toronto, en laissant de côté certains points et en développant davantage certains résultats et certaines preuves peu détaillées.

# Chapitre 1

## Le réarrangement symétrique

### 1.1 Définitions

**Propriété 1.** Si  $f$  est une fonction réelle mesurable positive, on a la représentation en mille-feuilles suivante :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \chi_{\{f>t\}}(x) dt$$

**Preuve.**

$$f(x) = \int_0^{f(x)} dt = \int_0^{+\infty} \chi_{[0, f(x)[}(t) dt = \int_0^{+\infty} \chi_{\{f>t\}}(x) dt$$

□

**Définition 2.** On définit le réarrangement symétrique d'un ensemble  $A \subset \mathbb{R}^n$  mesurable de mesure finie comme la boule  $A^*$  de centre 0 et de même volume que  $A$ .

En notant  $\omega_n = \text{Vol}(B(0, 1))$ , on peut écrire :

$$A^* = B\left(0, \left(\frac{\text{Vol}(A)}{\omega_n}\right)^{\frac{1}{n}}\right)$$

**Définition 3.** Si  $f$  est une fonction positive telle que les ensembles de niveau  $\{f > t\}$  soient tous de mesure finie pour  $t > 0$  (on dit que  $f$  est évanescente), on définit :

- La fonction de distribution :  $\mu_f : t \mapsto \text{Vol}(\{f > t\})$ .
- Le réarrangement symétrique de  $f$  :  $f^* : x \mapsto \int_0^{+\infty} \chi_{\{f>t\}^*}(x) dt$ .

Ces définitions sont motivées par la représentation en mille-feuilles et la volonté de rendre les fonctions symétriques. La fonction  $f^*$  est une symétrique (elle ne dépend que du rayon), et décroissante avec le rayon.

### 1.2 Propriétés élémentaires

**Propriété 4.** Si  $A$  est un ensemble mesurable de mesure finie, on a :

$$\chi_{A^*} = (\chi_A)^*$$

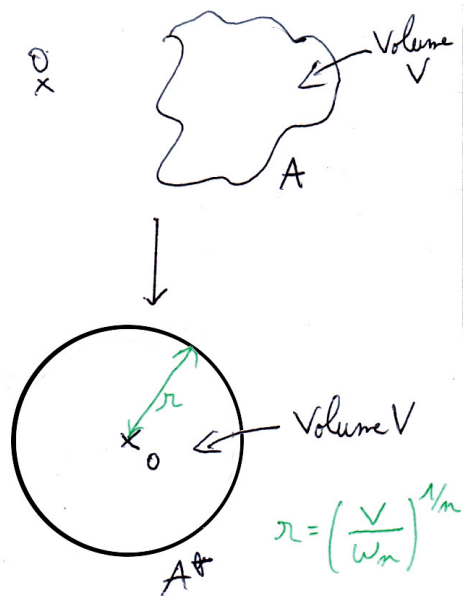
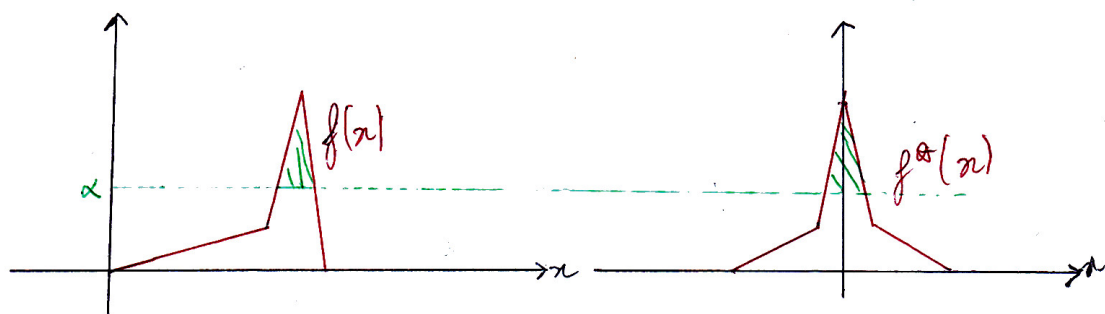


FIGURE 1.1 – Symétrisation d'un ensemble



Les ensembles hachurés en vert ont même aire quel que soit  $\alpha$ .

FIGURE 1.2 – Symétrisation d'une fonction

**Preuve.** On remarque que

$$\{\chi_A > t\}^* = \begin{cases} A^* & \text{si } t < 1 \\ \emptyset & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

et donc :

$$\chi_{A^*}^*(x) = \int_0^1 \chi_{A^*}(x) dt = \chi_{A^*}(x)$$

□

**Propriété 5.** Si  $f$  est évanescence, on a :

$$\{f > t\}^* = \{f^* > t\}$$

**Preuve.** On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
f^*(x) > t &\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \chi_{\{f>u\}^*}(x) du > t \\
&\Leftrightarrow \text{Vol}(\{u \mid x \in \{f > u\}^*\}) > t \\
&\Leftrightarrow \text{Vol}(\{u \mid \omega_n |x|^n < \text{Vol}\{f > u\}\}) > t \\
&\Leftrightarrow \sup(\{u \mid \omega_n |x|^n < \text{Vol}\{f > u\}\}) > t && \text{car c'est un intervalle dont} \\
&&& \text{0 est la borne inférieure} \\
&\Leftrightarrow \omega_n |x|^n < \text{Vol}\{f > t\} \Leftrightarrow x \in \{f > t\}^*
\end{aligned}$$

Pour passer de la dernière ligne à l'avant-dernière, on utilise le fait que  $\{u \mid \omega_n |x|^n < \text{Vol}\{f > u\}\}$  est ouvert (sans quoi  $t$  pourrait être un maximum).  $\square$

**Corollaire 6.** Si  $f$  est une fonction évanescence,  $\mu_f = \mu_{f^*}$ . On dit que  $f$  et  $f^*$  sont équimesurables.

On remarque en fait qu'il y a une bijection entre l'ensemble des fonctions symétriques décroissantes et les classes d'équivalence pour l'équimesurabilité. Deux fonctions  $f$  et  $g$  sont équimesurables si et seulement si  $f^* = g^*$ .

**Exemple 7.** Soit  $f : x \mapsto x^2 \chi_{]-1,1[}(x)$ .  $f$  est continue par morceaux à support compact donc évanescence. Calculons  $f^*$  :

$$\begin{aligned}
x \in \{f > t\} &\Leftrightarrow \sqrt{t} < |x| < 1 \\
x \in \{f > t\}^* &\Leftrightarrow |x| < 1 - \sqrt{t}
\end{aligned}$$

Si  $|x| \geq 1$ , on a clairement  $f^*(x) = 0$ , sinon :

$$\begin{aligned}
f^*(x) &= \int_0^{+\infty} \chi_{] \sqrt{t-1}, 1-\sqrt{t}[}(x) dt \\
&= \int_0^{+\infty} \chi_{[0, (1-|x|)^2[}(t) dt \\
&= (1 - |x|)^2
\end{aligned}$$

Ainsi  $f^* : x \mapsto (1 - |x|)^2 \chi_{]-1,1[}(x)$ . On remarque que  $f$  était lisse sur  $] -1, 1[$  alors que  $f^*$  ne l'est pas.

**Théorème 8.** Soit  $p \in [1, \infty]$  et  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  positive. Alors :

$$\|f\|_p = \|f^*\|_p$$

**Preuve.** Il suffit de montrer que  $\|f\|_p$  ne dépend que de  $\mu_f$ . Puisque  $f$  est positive, on utilise

la décomposition en mille-feuilles et le théorème de FUBINI sans hypothèses particulières.

$$\begin{aligned}
 \|f\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^n} (f(x))^p dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} \chi_{\{f^p > t\}}(x) dt dx \\
 &= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\{f^p > t\}}(x) dx dt \\
 &= \int_0^{+\infty} \text{Vol}(\{f^p > t\}) dt \\
 &= \int_0^{+\infty} \mu_f(t^{\frac{1}{p}}) dt
 \end{aligned}$$

□

**Propriété 9.**  $f \leq g \Rightarrow f^* \leq g^*$

**Preuve.** Écrivons

$$\begin{aligned}
 f \leq g &\Rightarrow \forall t, \{f > t\} \subset \{g > t\} \\
 &\Rightarrow \forall t, \text{Vol}(\{f > t\}) \leq \text{Vol}(\{g > t\}) \\
 &\Rightarrow \forall t, \{f > t\}^* \subset \{g > t\}^* \\
 &\Rightarrow \forall t, \{f^* > t\} \subset \{g^* > t\} \quad (\text{Prop. 5}) \\
 &\Rightarrow f^* \leq g^*
 \end{aligned}$$

□

### 1.3 Premières inégalités

**Théorème 10.** (HARDY-LITTLEWOOD) Soient  $f$  et  $g$  positives évanescentes, alors :

$$\int fg \leq \int f^* g^*$$

En particulier, si le membre de droite est fini, alors  $fg \in L^1$ .

**Preuve.** Commençons par regarder le cas des fonctions indicatrices de deux ensembles  $A$  et  $B$ . On veut montrer  $\int \chi_A \chi_B \leq \int \chi_A^* \chi_B^*$ , c'est-à-dire  $\text{Vol}(A \cap B) \leq \text{Vol}(A^* \cap B^*)$ . Puisque  $A^*$  et  $B^*$  sont des boules centrées en 0, on a :

$$\text{Vol}(A^* \cap B^*) = \min(\text{Vol}(A^*), \text{Vol}(B^*)) = \min(\text{Vol}(A), \text{Vol}(B)) \geq \text{Vol}(A \cap B)$$

ce qui prouve le résultat dans ce cas.

De manière générale, soient  $f$  et  $g$  évanescentes positives. En utilisant la décomposition en mille-feuilles, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int fg &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \chi_{\{f>s\}}(x) \chi_{\{g>t\}}(x) ds dt dx \\
&= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\{f>s\}}(x) \chi_{\{g>t\}}(x) dx ds dt \\
&\leq \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\{f>s\}}^*(x) \chi_{\{g>t\}}^*(x) dx ds dt && \text{(cf. cas précédent)} \\
&= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\{f^*>s\}}(x) \chi_{\{g^*>t\}}(x) dx ds dt && \text{(Prop. 6 et 4)} \\
&= \int f^* g^*
\end{aligned}$$

□

**Théorème 11.** *Pour toutes  $f$  et  $g$  évanescentes :*

$$\|f - g\|_p \geq \|f^* - g^*\|_p$$

**Preuve.** Montrons d'abord que :

$$|f(x) - g(x)|^p = p \int_0^{+\infty} [f(x) - t]_+^{p-1} \chi_{\{g(x) \leq t\}} + [g(x) - t]_+^{p-1} \chi_{\{f(x) \leq t\}} dt$$

Supposons par exemple  $f(x) \geq g(x)$ . Alors, le terme de droite donne :

$$\begin{aligned}
RT &= p \int_{g(x)}^{+\infty} [f(x) - t]_+^{p-1} dt + p \int_{f(x)}^{+\infty} [g(x) - t]_+^{p-1} dt \\
&= p \int_{g(x)}^{+\infty} [f(x) - t]_+^{p-1} dt + 0 \\
&= p \int_{g(x)}^{f(x)} (f(x) - t)^{p-1} dt \\
&= p \int_0^{f(x)-g(x)} t^{p-1} dt = (f(x) - g(x))^p
\end{aligned}$$

Par conséquent, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\|f - g\|_p^p &= p \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} [f(x) - t]_+^{p-1} \chi_{\{g(x) \leq t\}} + [g(x) - t]_+^{p-1} \chi_{\{f(x) \leq t\}} dt dx \\
&= I_1(f, g) - I_2(f, g)
\end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned}
I_1(f, g) &= p \left( \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} [f(x) - t]_+^{p-1} + [g(x) - t]_+^{p-1} dt dx \right) \\
I_2(f, g) &= p \left( \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} [f(x) - t]_+^{p-1} \chi_{\{g(x) > t\}} + [g(x) - t]_+^{p-1} \chi_{\{f(x) > t\}} dt dx \right)
\end{aligned}$$

Calculons  $I_1(f, g)$  :



$$\begin{aligned}
I_1(f, g) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( p \int_0^{f(x)} t^{p-1} dt + p \int_0^{g(x)} t^{p-1} dt \right) dx \\
&= \|f\|_p^p + \|g\|_p^p \\
&= \|f^*\|_p^p + \|g^*\|_p^p = I_1(f^*, g^*)
\end{aligned}$$

Calculons  $(f - t)_+^*$  :

$$(f - t)_+^*(x) = \int_0^{+\infty} \chi_{\{f > s+t\}}^*(x) ds = \int_0^{+\infty} \chi_{\{f^* > s+t\}}(x) ds = (f^* - t)_+(x)$$

Majorons  $I_2(f, g)$  à l'aide de l'inégalité de HARDY-LITTLEWOOD :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} [f(x) - t]_+^{p-1} \chi_{\{g(x) > t\}} dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} ([f(x) - t]_+^*)^{p-1} \chi_{\{g(x) > t\}}^* dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} [f^*(x) - t]_+^{p-1} \chi_{\{g^*(x) > t\}} dx
\end{aligned}$$

Et de même pour l'autre terme, on en déduit :  $I_2(f, g) \leq I_2(f^*, g^*)$ .

Ainsi :

$$\|f - g\|_p^p = I_1(f, g) - I_2(f, g) \geq I_1(f^*, g^*) - I_2(f^*, g^*) = \|f^* - g^*\|_p^p$$

□

## 1.4 Inégalité de FABER-KRAHN

Dans cette section, on fixe un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  de volume fini. Posons  $\lambda_1(\Omega)$  la valeur propre principale du Laplacien de DIRICHLET sur  $\Omega$ , c'est-à-dire le plus petit  $\lambda$  tel qu'il existe  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  non nulle vérifiant :

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda u & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

et  $S(\lambda, \Omega)$  l'ensemble des solutions.

Admettons l'inégalité suivante, qui sera prouvée plus tard :

**Théorème 12** (inégalité de PÓLYA-SZEGŐ). *Si  $g$  est une fonction évanescence et que  $u$  et  $u^*$  sont dans  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)^1$ , alors :*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u^*|^p \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p$$

**Théorème 13** (FABER-KRAHN). *On a  $\lambda_1(\Omega) \geq \lambda_1(\Omega^*)$ .*

**Preuve.** Par le théorème spectral, il existe une suite positive croissante  $\lambda_n \rightarrow +\infty$  et une base hilbertienne de  $L^2(\Omega)$  composée d'éléments de  $H_0^1(\Omega)$ , notée  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $-\Delta e_n = \lambda_n e_n$ . On vérifie aisément

$$\lambda_1(\Omega) = - \inf_{\|\varphi\|_2=1} \langle \Delta \varphi, \varphi \rangle = \inf_{\|\varphi\|_2=1} \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2$$

On a besoin de la propriété suivante :

---

1. On définira plus tard cet espace. Il suffit pour l'instant de savoir qu'une fonction  $C^\infty$  à support compact y appartient.

**Propriété 14.** On peut choisir une fonction propre positive associée à  $\lambda_1(\Omega)$ .

**Preuve.** Soit une fonction propre  $\varphi_1$ . Notons  $\varphi_1^+$  et  $\varphi_1^-$  ses parties positive et négative. Supposons que  $\varphi_1$  ne soit pas de signe constant, c'est-à-dire que les deux fonctions  $\varphi_1^+$  et  $\varphi_1^-$  soient non nulles (si ce n'était pas le cas, le résultat serait trivial). On pose :

$$a = \int (\varphi_1^+)^2, \quad b = \int (\varphi_1^-)^2, \quad a' = \int |\nabla \varphi_1^+|^2, \quad b' = \int |\nabla \varphi_1^-|^2, \quad r = \min\left(\frac{a'}{a}, \frac{b'}{b}\right)$$

Alors :

$$\lambda_1(\Omega) = \frac{\int |\nabla \varphi_1|^2}{\int \varphi_1^2} = \frac{a' + b'}{a + b} \geq \frac{ar + br}{a + b} = r$$

Ainsi, un des deux arguments du minimum est inférieur à  $\lambda_1(\Omega)$ . Supposons que ce soit  $\frac{a'}{a}$ . Posons  $u = \frac{1}{\sqrt{a}}(\varphi_1^+)$ . Alors  $\|u\|_2 = 1$  et  $\int |\nabla u|^2 \leq \lambda_1(\Omega)$ .

À cause de la caractérisation de  $\lambda_1(\Omega)$  comme minimum, on sait qu'il doit y avoir égalité dans cette dernière inégalité. Ainsi  $u$  est une fonction propre positive<sup>2</sup>.  $\square$

Soit donc  $\varphi_1$  une fonction propre correspondant à  $\lambda_1$ , choisie de norme 1 et positive. On peut appliquer l'inégalité de PÓLYA-SZEGŐ et obtenir directement :

$$\lambda_1(\Omega) = \int_{\Omega} |\nabla \varphi_1|^2 \geq \int_{\Omega^*} |\nabla \varphi_1^*|^2 \geq \lambda_1(\Omega^*)$$

On a utilisé la caractérisation de  $\lambda_1(\Omega^*)$  comme infimum pour la dernière inégalité.  $\square$

---

2. On admet qu'une fonction propre du Laplacien de DIRICHLET dans  $H_0^1(\Omega)$  est nécessairement dans  $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ .

## Chapitre 2

# Polarisations

### 2.1 Définitions

**Définition 15.** Soit  $\sigma$  une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan affine  $X_0$  qui ne contient pas 0 (on nommera par la suite une telle symétrie « réflexion » sans tout préciser). Cet hyperplan scinde l'espace en deux ouverts  $X_+$  (celui qui contient 0) et  $X_-$  (l'autre). On définit la polarisation d'un ensemble  $A$  par rapport à  $\sigma$  de la façon suivante :

$$A^\sigma = [(A \cup \sigma A) \cap X_+] \cup [(A \cap \sigma A) \cap X_-] \cup [A \cap X_0]$$

Géométriquement, cela revient, pour chaque couple de points  $(x, \sigma x)$ , à faire la chose suivante :

- Si ni  $x$  ni  $\sigma x$  ne sont dans  $A$ , ou s'ils y sont tous deux, alors il en va de même pour  $A^\sigma$ .
- Si un seul des points  $x$  et  $\sigma x$  est dans  $A$  alors celui des deux qui est dans  $X_+$ , et celui-ci uniquement, est dans  $A^\sigma$ .

Ainsi, cela revient à toujours mettre la masse « préférentiellement dans  $X_+$  ». On a clairement  $\text{Vol}(A^\sigma) = \text{Vol}(A)$ .

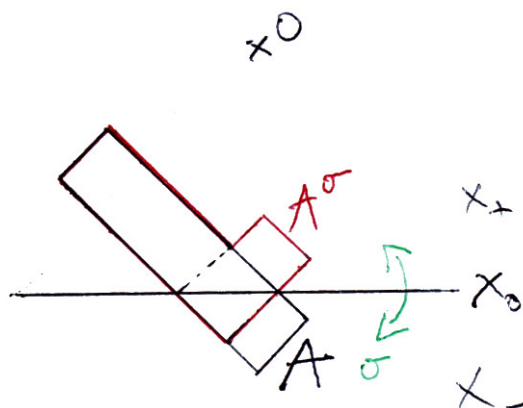


FIGURE 2.1 – Polarisation d'un ensemble

**Définition 16.** Pour une fonction  $f$  évanescence, on définit de manière analogue au cas des symétrisa-

tions la polarisation  $f^\sigma$  de la façon suivante :

$$f^\sigma(x) = \begin{cases} \max\{f(x), f(\sigma(x))\} & x \in X_+ \\ \min\{f(x), f(\sigma(x))\} & x \in X_- \\ f(x) & x \in X_0 \end{cases}$$

C'est-à-dire que  $\{f^\sigma \geq t\} = \{f \geq t\}^\sigma$ , et donc que  $f^\sigma(x) = \int \chi_{\{f \geq t\}^\sigma}(x) dt$ .

En 1D, cas  $\sigma : x \mapsto 2-x$  :

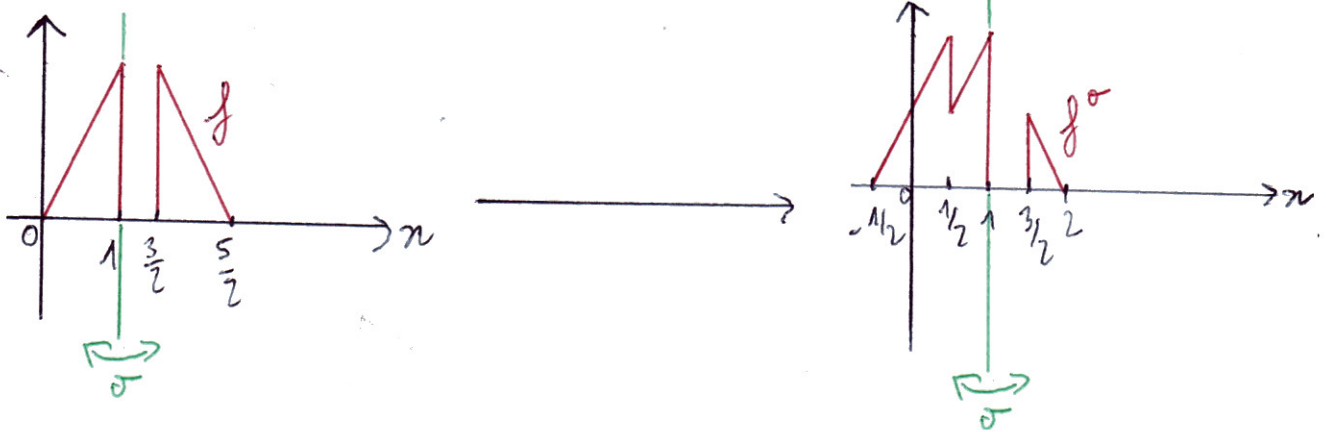


FIGURE 2.2 – Polarisation d'une fonction

## 2.2 Propriétés élémentaires

**Lemme 17.** Soit  $f$  une fonction uniformément continue sur  $\mathbb{R}^n$  et  $\delta$  un module de continuité de  $f$ . Alors, pour toute réflexion  $\sigma$ ,  $f^\sigma$  est uniformément continue avec le même module de continuité.

**Preuve.** Soient  $\varepsilon > 0$ , et  $x, y$  deux points tels que  $|x - y| < \delta(\varepsilon)$ . Si  $x, y$  sont tous deux dans  $X_+$ , on a

$$\begin{aligned} |f^\sigma(x) - f^\sigma(y)| &= |\max\{f(x), f(\sigma x)\} - \max\{f(y), f(\sigma y)\}| \\ &\leq \max\{|f(x) - f(y)|, |f(\sigma x) - f(\sigma y)|\} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Si  $x, y$  sont dans  $X_-$ , on remplace simplement les max par les min dans les lignes précédentes. Enfin si ces deux points sont dans les différentes moitiés de l'espace, on a

$$\begin{aligned} |f^\sigma(x) - f^\sigma(y)| &\leq \max\{|f(x) - f(y)|, |f(\sigma x) - f(y)|, |f(x) - f(\sigma y)|, |f(\sigma x) - f(\sigma y)|\} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

car  $|x - \sigma y| = |\sigma x - y| \leq |x - y| < \varepsilon$ . □

**Lemme 18** (forme de l'inégalité de RIESZ pour les polarisations). Soit une fonction décroissante  $H : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}^+$  qui tend vers 0 en  $+\infty$ . Alors, quelles que soient  $f$  et  $g$  positives mesurables :

$$\iint f(x)g(y)H(|x - y|)dxdy \leq \iint f^\sigma(x)g^\sigma(y)H(|x - y|)dxdy$$

Si  $H$  décroît strictement, il y a égalité si et seulement si  $f = f^\sigma$  et  $g = g^\sigma$  ou  $f = f^\sigma \circ \sigma$  et  $g = g^\sigma \circ \sigma$  presque partout.

**Preuve.** Notons  $I(f, g)$  l'intégrale de gauche.

$$\begin{aligned} I(f, g) &= \int_{X_+} \int_{X_+} f(x)g(y)H(|x-y|)dxdy + \int_{X_-} \int_{X_-} f(x)g(y)H(|x-y|)dxdy \\ &\quad + \int_{X_-} \int_{X_+} f(x)g(y)H(|x-y|)dxdy + \int_{X_+} \int_{X_-} f(x)g(y)H(|x-y|)dxdy \\ &= \int_{X_+} \int_{X_+} f(x)g(y)H(|x-y|)dxdy + \int_{X_+} \int_{X_+} f(\sigma x)g(\sigma y)H(|\sigma x - \sigma y|)dxdy \\ &\quad + \int_{X_+} \int_{X_+} f(x)g(\sigma y)H(|x - \sigma y|)dxdy + \int_{X_+} \int_{X_+} f(\sigma x)g(y)H(|\sigma x - y|)dxdy \end{aligned}$$

Puisque  $\sigma$  est une réflexion, c'est une isométrie donc  $|\sigma x - \sigma y| = |x - y|$  et  $|x - \sigma y| = |\sigma x - y|$ .  
Ainsi :

$$\begin{aligned} I(f, g) &= \int_{X_+} \int_{X_+} [(f(x)g(y) + f(\sigma x)g(\sigma y))] H(|x - y|) \\ &\quad + [f(x)g(\sigma y) + f(\sigma x)g(y)] H(|\sigma x - y|)dxdy \end{aligned}$$

Il suffit de vérifier que l'intégrande croît lorsqu'on polarise  $f$  et  $g$ .

Si  $f(x) \geq f(\sigma x)$  et  $g(x) \geq g(\sigma x)$  ou si  $f(x) < f(\sigma x)$  et  $g(x) < g(\sigma x)$  alors la polarisation ne fait qu'échanger des termes et on a donc égalité.

En revanche, si par exemple  $f(x) \geq f(\sigma x)$  et  $g(y) < g(\sigma y)$ , il faut montrer que :

$$\begin{aligned} &[(f(x)g(\sigma y) + f(\sigma x)g(y))]H(|x - y|) + [f(x)g(y) + f(\sigma x)g(\sigma y)] H(|\sigma x - y|) \\ &\geq [(f(x)g(y) + f(\sigma x)g(\sigma y))]H(|x - y|) + [f(x)g(\sigma y) + f(\sigma x)g(y)] H(|\sigma x - y|) \end{aligned}$$

C'est-à-dire, en factorisant :

$$(f(x) - f(\sigma x))(g(\sigma y) - g(y))(H(|x - y|) - H(|x - \sigma y|)) \geq 0$$

Les deux premiers facteurs sont positifs par hypothèse sur les valeurs de  $f$  et  $g$ , et le troisième terme est positif lorsque  $x$  est plus proche de  $y$  que de  $\sigma y$  (par décroissance de  $H$ ). Ceci est toujours vrai puisque  $x, y \in X_+$ .

Le cas d'égalité se déduit facilement de la factorisation précédente.  $\square$

**Lemme 19.** Soit  $\varphi$  une fonction  $C^2$  définie sur  $(\mathbb{R}^2)^+ = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  et qui satisfait  $\partial_x \partial_y \varphi \geq 0$ , alors pour toutes fonctions évanescentes  $f, g$  on a

$$\int \varphi(f(x), g(x))dx \leq \int \varphi(f^\sigma(x), g^\sigma(x))dx$$

**Preuve.** On montre d'abord l'inégalité :

$$\varphi(s_1, s_2) + \varphi(t_1, t_2) \leq \varphi(\max\{s_1, t_1\}, \max\{s_2, t_2\}) + \varphi(\min\{s_1, t_1\}, \min\{s_2, t_2\})$$

Pour ce faire, distinguons les deux cas suivants :

- Si  $s_1 \geq s_2$  et  $t_1 \geq t_2$  ou  $s_1 \leq s_2$  et  $t_1 \leq t_2$ , les deux membres sont égaux.
- Sinon, si par exemple  $s_1 \geq s_2$  et  $t_1 < t_2$ , alors la différence entre les deux membres s'écrit :

$$\int_{s_2}^{s_1} \int_{t_1}^{t_2} \partial_t \partial_s \varphi \geq 0$$

Revenons au lemme. Si on applique l'inégalité précédente en considérant en chaque point  $s_1 = f(x)$ ,  $s_2 = g(x)$ ,  $t_1 = f(\sigma x)$  et  $t_2 = g(\sigma x)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \int \varphi(f(x), g(x)) dx &= \int_{X_+} \varphi(f(x), g(x)) dx + \int_{X_+} \varphi(f(\sigma x), g(\sigma x)) dx \\ &\leq \int_{X_+} \varphi(f^\sigma(x), g^\sigma(x)) dx + \int_{X_+} \varphi(f^\sigma(\sigma x), g^\sigma(\sigma x)) dx \\ &= \int \varphi(f^\sigma(x), g^\sigma(x)) dx \end{aligned}$$

□

**Théorème 20.** Soit  $f, g$  positives mesurables et une réflexion  $\sigma$ , alors on a une inégalité de HARDY-LITTLEWOOD pour les polarisations

$$\int fg \leq \int f^\sigma g^\sigma$$

avec égalité si et seulement si  $(f(x) - f(\sigma x))(g(x) - g(\sigma x)) \geq 0$  presque partout.

**Preuve.** Pour des raisons analogues au cas des symétrisations, il suffit de vérifier l'inégalité pour les fonctions caractéristiques. On doit donc vérifier que  $\text{Vol}(A^\sigma \cap B^\sigma) \geq \text{Vol}(A \cap B)$ . Cela découle directement de l'inclusion  $(A \cap B)^\sigma \subset A^\sigma \cap B^\sigma$ , qu'on prouve en comparant les intersections respectives avec  $X_-, X_0, X_+$ .

On peut également appliquer le lemme précédent à  $\varphi(x, y) = xy$ .

On cherche maintenant à déterminer le cas d'égalité. D'après la preuve du lemme précédent, on a l'égalité si et seulement si

$$f(x)g(x) + f(\sigma x)g(\sigma x) = f^\sigma(x)g^\sigma(x) + f^\sigma(\sigma x)g^\sigma(\sigma x) \quad \text{p.p.}$$

i.e. si et seulement si  $(f(x) - f(\sigma x))(g(x) - g(\sigma x)) \geq 0$  p.p. □

**Théorème 21.** La polarisation raccourcit les distances  $L^p$ , c'est-à-dire que si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions évanescents, alors :

$$\|f - g\|_p \geq \|f^\sigma - g^\sigma\|_p$$

**Preuve.** Il suffit d'appliquer le lemme 19 à  $\varphi(x, y) = |x - y|^p$ . □

### 2.3 Lien avec les réarrangements symétriques

**Lemme 22.** Soit une fonction  $f$  évanescence non nulle. On appelle centre de masse de  $f$  la quantité :

$$\mathcal{M}(f) = \frac{\int x f(x) dx}{\int f(x) dx}.$$

Le centre de masse de  $f^\sigma$  est nécessairement dans  $X_+ \cup X_0$ , et il est dans  $X_0$  si et seulement si  $f = f \circ \sigma$ .

**Preuve.** Soit  $u$  le vecteur normal à  $X_0$  unitaire et orienté vers  $X_+$ , et  $l$  une forme affine s'annulant exactement sur  $X_0$ , choisie positive dans  $X_+$ , et de partie linéaire  $\tilde{l}$ . On a  $\tilde{l}(u) > 0$ .

Soit un point  $a$  quelconque de  $X_0$  et  $\tilde{X}_0 = X_0 - a$ . Tout vecteur  $x \in X$  s'écrit  $x = a + v(x) + l(x)u$  où  $v(x) \in \tilde{X}_0$ , et on a  $\sigma x = a + v(x) - l(x)u$ , avec l'équivalence  $u \in X_+ \Leftrightarrow l(u) > 0$ .

On pose  $I = \int f(x)dx = \int f^\sigma(x)dx$ .

$$\begin{aligned} \int x f^\sigma(x)dx &= \int_{X_+} x f^\sigma(x) + (\sigma x) f^\sigma(\sigma x) dx \\ &= \int_{\tilde{X}_+} \int_0^{+\infty} (a + v)(f(x) + f(\sigma x)) + tu|f(x) - f(\sigma x)| dt dv \\ &= Ia + \int_{\tilde{X}_0} \int_0^{+\infty} v(f(x) + f(\sigma x)) + tu|f(x) - f(\sigma x)| dt dv \end{aligned}$$

Puisque  $\frac{1}{I}(Ia) = a$  appartient à  $X_0$ , on peut calculer  $l(\mathcal{M}(f^\sigma))$  en utilisant la linéarité de  $\tilde{l}$  :

$$\begin{aligned} l(\mathcal{M}(f^\sigma)) &= l\left(\frac{1}{I} \left( \int x f^\sigma(x) dx \right)\right) \\ &= \tilde{l} \left( \frac{1}{I} \left( \int_{\tilde{X}_0} \int_0^{+\infty} v(f(x) + f(\sigma x)) + tu|f(x) - f(\sigma x)| dt dv \right) \right) \\ &= \frac{1}{I} \left( \int_{\tilde{X}_0} \int_0^{+\infty} (f(x) + f(\sigma x)) \tilde{l}(v) + t|f(x) - f(\sigma x)| \tilde{l}(u) dt dv \right) \end{aligned}$$

Or  $\ker(\tilde{l}) = \tilde{X}_0$  donc  $\tilde{l}(v) = 0$ . Ainsi :

$$l(\mathcal{M}(f^\sigma)) = \frac{1}{I} \left( \int_{\tilde{X}_0} \int_0^{+\infty} t|f(x) - f(\sigma x)| dt dv \right) \tilde{l}(u) \geq 0$$

On en conclut que  $\mathcal{M}(f^\sigma)$  est dans  $X_0 \cup X_+$ . Par ailleurs, ce nombre n'est nul que si  $f(x) = f(\sigma x)$  presque partout d'où le cas d'égalité. □

**Lemme 23.** Soit une fonction  $f$  évanescence. Alors  $f = f^*$  si et seulement si pour toute réflexion  $\sigma$ ,  $f = f^\sigma$  et  $f = f^* \circ \tau$  pour une certaine translation  $\tau$  si et seulement si pour toute réflexion  $\sigma$ ,  $f = f^\sigma$  ou  $f = f^\sigma \circ \sigma$ .

**Preuve.** Les implications directes sont claires.

Supposons que  $f$  ne soit pas une fonction décroissante du rayon, c'est-à-dire qu'on a deux points  $x_1$  et  $x_2$  vérifiant  $|x_1| < |x_2|$  et  $f(x_1) < f(x_2)$ . En choisissant pour  $\sigma$  la réflexion qui échange  $x_1$  et  $x_2$  et  $X$  le plan de ses points fixes (qui ne contient pas 0 car c'est l'ensemble des points équidistants à  $x_1$  et  $x_2$ ). Alors  $x_1$  est dans  $X_+$ , et on a donc  $f^\sigma(x_1) = f(x_2)$  et  $f^\sigma(x_2) = f(x_1)$ . Ainsi,  $f \neq f^\sigma$ . On a montré par contraposée que si  $f = f^\sigma$  pour toute réflexion  $\sigma$  alors  $f$  décroît avec le rayon. Dans ce cas, l'ensemble  $\left\{ r / \sup_{|y|=r} f(y) \neq \inf_{|y|=r} f(y) \right\}$  est l'union dénombrable des ensembles  $\left\{ r / \sup_{|y|=r} f(y) \geq \inf_{|y|=r} f(y) + \frac{1}{n} \right\}$  dont l'intersection avec chaque compact est finie, il est donc dénombrable, et par conséquent de mesure nulle. La fonction est ainsi symétrique et on a donc bien l'équivalence souhaitée.

Supposons que pour toute réflexion  $\sigma$ , on ait  $f = f^\sigma$  ou  $f = f^\sigma \circ \sigma$ . Sans perte de généralité (par densité), on peut supposer  $f$  intégrable et bornée. On vérifie qu'en composant  $f$  à droite par une translation on ne change pas l'hypothèse faite sur  $f$ . On peut donc supposer que le centre de masse de  $f$  est en 0. Le centre de masse de  $f^\sigma$  étant toujours dans  $X_+ \cup X_0$ , celui de  $f^\sigma \circ \sigma$  est toujours dans  $X_- \cup X_0$ , et ne vaut donc jamais 0. Il est par conséquent impossible que  $f = f^\sigma \circ \sigma$ , et on a donc  $f = f^\sigma$  pour toute réflexion  $\sigma$ . D'après le résultat précédent, on a  $f = f^*$ , d'où le théorème.  $\square$

**Proposition 24.** *Soit une fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}^n$  continue positive à support compact.*

*On pose  $\text{Pol}_f$  l'ensemble des fonctions qu'il est possible d'obtenir en polarisant un nombre fini de fois  $f$  (selon des hyperplans différents).*

*Alors il existe une suite  $(g_k) \in (\text{Pol}_f)^\mathbb{N}$  telle que  $g_k \rightarrow f^*$  uniformément.*

**Preuve.** Observons que :

— Pour tout  $x$ , l'ensemble  $\text{Pol}_f(x) = \{g(x) \mid g \in \text{Pol}_f\}$  est borné en norme infinie (par la norme infinie de  $f$ ), donc relativement compact.

— Les polarisations renforcent le module de continuité donc  $\text{Pol}_f$  est équicontinu.

donc par le théorème d'ARZÈLA-ASCOLI,  $\text{Pol}_f$  est relativement compact dans  $C_c$ .

Soit maintenant  $H$  une fonction bornée fixée, strictement décroissante sur  $\mathbb{R}^+$ , de limite nulle à l'infini. Posons

$$I : g \in C_c \mapsto \int g(x)H(|x|)dx$$

qui est une forme linéaire continue sur  $C_c$ . Puisque  $\text{Pol}_f$  est relativement compact dans  $C_c$ , on sait que la restriction de  $I$  à l'adhérence de  $\text{Pol}_f$  atteint son maximum en une fonction  $g$ . On va montrer que  $g = f^*$ .

Soit  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\text{Pol}_f)^\mathbb{N}$  une suite convergeant uniformément vers  $g$ . Alors toute polarisation  $g^\sigma$  est dans l'adhérence de  $\text{Pol}_f$  car  $(g_n^\sigma)$  converge uniformément vers  $g^\sigma$ . De ce fait,  $I(g) \geq I(g^\sigma)$  quelle que soit la réflexion  $\sigma$ . L'inégalité de HARDY-LITTLEWOOD pour les polarisations nous dit que  $I(g) \leq I(g^\sigma)$ , et donc  $I(g) = I(g^\sigma)$ . Nous sommes ainsi dans le cas d'égalité, c'est-à-dire qu'on a

$$(g(x) - g(\sigma x))(H(|x|) - H(|\sigma x|)) \geq 0 \quad \text{p.p.},$$

ce qui entraîne que  $g = g^\sigma$ . Cela étant vrai quel que soit  $\sigma$ , on en déduit que  $g = g^*$ .

Sachant que  $f$  et  $g$  sont équimesurables ( $g$  étant une limite uniforme de fonctions équimesurables avec  $f$ ) on a  $g^* = f^*$  et donc  $g = f^*$ , ce qui termine la preuve.  $\square$

Cette proposition montre qu'à peu près tout résultat prouvé sur les polarisations vaudra pour les symétrisations, par densité des fonctions à support compact et passage à la limite. Par exemple :

**Corollaire 25.** *Soit  $f$  une fonction évanescence uniformément continue. Alors  $f^*$  est uniformément continue avec le même module de continuité.*

**Preuve.** Puisque  $f$  est une fonction évanescence uniformément continue, on peut l'écrire comme une limite uniforme de fonctions à support compact qui ont le même module de continuité. La proposition précédente permet alors de conclure, le résultat étant connu pour les polarisations.  $\square$

On peut également prouver une forme de l'inégalité de RIESZ pour les symétrisations par ce principe.



# Chapitre 3

## Applications

Dans cette section, nous allons démontrer des inégalités classiques. Commençons par rappeler quelques résultats d'analyse fonctionnelle.

### 3.1 Quelques rappels

Soient  $\Omega = \mathbb{R}^n$  ou un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ , et  $p$  un réel compris entre 1 et  $+\infty$ .

**Définition 26.** L'espace de SOBOLEV  $W^{1,p}(\Omega)$  est défini par

$$W^{1,p} = \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid \exists g_1, \dots, g_n \in L^p(\Omega) \text{ telles que } \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \forall i, \int_{\Omega} u \partial_i \varphi = - \int_{\Omega} g_i \varphi \right\}$$

On nomme dérivées faibles de  $u$  les fonctions  $g_i$  correspondantes, qu'on notera  $\partial_i u$ .

**Proposition 27.** Munissons  $W^{1,p}$  de la norme :

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_p + \sum_{i=1}^n \|\partial_i u\|_p.$$

Celle-ci confère à  $W^{1,p}$  un structure d'espace de BANACH. Il est séparable si  $p \in [1, \infty[$  et réflexif si  $p \in ]1, \infty[$ .

**Théorème 28 (STAMPACCHIA).** Soit  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $C^1$  par morceaux et lipschitzienne avec  $G(0) = 0$ . Alors pour tout  $u \in W^{1,p}$ ,  $G \circ u \in W^{1,p}$  et

$$\nabla(G \circ u) = (G' \circ u) \nabla u \quad p.p$$

où  $\nabla g$  désigne le vecteur dont la  $i$ -ème coordonnée est  $\partial_i g$ .

**Preuve.** On peut supposer que  $G$  est de classe  $C^1$ . Soit  $M$  tel que  $|G'| \leq M$ . On a, pour tout  $s \in \mathbb{R}$ ,  $|G(s)| \leq M|s|$ . Par conséquent,  $G \circ u \in L^p$  et  $(G' \circ u) \partial_i u \in L^p$ . Il reste à établir

$$\forall \varphi \in C_c^\infty, \int_{\Omega} (G \circ u) \partial_i \varphi = - \int_{\Omega} (G' \circ u) \partial_i u \cdot \varphi.$$

Commençons par la cas où  $p$  est fini. Grâce à la méthode de régularisation, on peut choisir une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $C_c^\infty$  telle que

- $u_n \rightarrow u$  dans  $L^p(\Omega)$  et presque partout sur  $\Omega$ .
- $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$  dans  $(L^p(\omega))^n$  pour tout ouvert  $\omega$  vérifiant  $\bar{\omega} \subset \Omega$ .

On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \varphi \in C_c^\infty, \int_{\Omega} (G \circ u_n) \partial_i \varphi = - \int_{\Omega} (G' \circ u_n) \partial_i u_n \cdot \varphi.$$

Or par convergence dominée,  $G \circ u_n \rightarrow G \circ u$  dans  $L^p(\Omega)$  et  $(G' \circ u_n) \partial_i u_n \rightarrow (G' \circ u) \partial_i u$  dans  $L^p(\omega)$  pour tout ouvert  $\omega$  vérifiant  $\bar{\omega} \subset \Omega$ . On a donc le résultat désiré.

Traisons enfin le cas  $p = +\infty$ . Fixons un ouvert borné  $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$  tel que  $\text{supp}(\varphi) \subset \Omega'$  et  $\bar{\Omega}' \subset \Omega$ . On voit que  $u \in W^{1,p}(\Omega')$ , ce qui permet de conclure d'après le cas précédent.  $\square$

**Corollaire 29.** *Le maximum et le minimum de deux fonctions dans  $W^{1,p}(\Omega)$  sont encore dans  $W^{1,p}(\Omega)$ .*

**Preuve.** On ne traite que le cas du minimum. Soient  $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$ .

La fonction  $G : x \mapsto \max(x, 0)$  est  $C^1$  par morceaux, lipschitzienne et vérifie  $G(0) = 0$ . Puisque  $\min(u, v) = u - \max(u - v, 0)$ , le résultat souhaité s'obtient directement comme corollaire du théorème de STAMPACCHIA.  $\square$

## 3.2 Inégalité de PÓLYA-SZEGŐ

**Lemme 30.** *(Identité de PÓLYA-SZEGŐ pour les polarisations) Soient  $1 \leq p \leq +\infty$ ,  $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  et une réflexion  $\sigma$  ne fixant pas 0. Alors  $|\nabla f^\sigma|$  et  $|\nabla f|$  sont équimesurables. En particulier,*

$$\|\nabla f^\sigma\|_p = \|\nabla f\|_p.$$

**Preuve.** D'après ce qui précède, la polarisation  $f^\sigma$  est dans  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ . Par un argument de densité, il suffit de regarder les gradients de  $f^\sigma$  et de  $f$  sur  $\mathbb{R}^n \setminus X_0$  (avec les notations  $X_0, X_+$  et  $X_-$  habituelles).

Soit  $x \in X_+$ . On écrit  $f^\sigma(x) = \max\{f(x), f(\sigma x)\} = -\min\{f(x) - f(\sigma x), 0\} + f(x)$ , ce qui montre que

$$\nabla f^\sigma(x) = \begin{cases} \nabla f(x) & f(x) \geq f(\sigma x) \\ \sigma \nabla f(\sigma x) & f(x) \leq f(\sigma x) \end{cases}$$

De même,

$$\nabla f^\sigma(\sigma x) = \begin{cases} \nabla f(\sigma x) & f(x) \geq f(\sigma x) \\ \sigma \nabla f(x) & f(x) \leq f(\sigma x) \end{cases}$$

Puisque  $\sigma$  préserve la norme euclidienne et la mesure, le résultat est alors clair.  $\square$

Notre prochain objectif est de démontrer l'inégalité de PÓLYA-SZEGŐ admise précédemment. Nous utiliserons pour cela le résultat suivant :

**Propriété 31.** *Soit  $f$  une fonction évanescence. Si  $f \in W^{1,p}$ , alors il existe une suite  $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$  dans  $\text{Pol}_f$  telle que*

- $g_k$  tende fortement vers  $f^*$  dans  $L^p$ .
- $\nabla g_k$  tende faiblement vers  $\nabla f^*$  dans  $(L^p)^n$ .

**Preuve.** On décompose la preuve en trois étapes :

- 1<sup>ère</sup> étape : Trouver un bon candidat  $(g_k)$  parmi les suites d'éléments de  $\text{Pol}_f$ .

Par la méthode de régularisation, on sait que l'ensemble des fonctions lisses positives à support compact est dense (au sens de  $\|\cdot\|_p$ ) dans l'ensemble des fonctions positives de  $L^p(\mathbb{R}^n)$ , quel que soit  $p \in [1, +\infty[$ . On peut donc trouver une suite  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de fonctions lisses positives à support compact telle que  $\|f_k - f\|_p \leq \frac{1}{k}$ .

On utilise ensuite la proposition 24. On a vu que pour toute fonction  $h$  continue positive à support compact, il existe une suite dans  $\text{Pol}_h$  convergeant uniformément vers  $h^*$ . On sait de plus que cette convergence n'a pas lieu seulement pour  $\|\cdot\|_\infty$  mais aussi pour  $\|\cdot\|_p$  puisque toute fonction de  $\text{Pol}_h$  est à support dans  $\text{supp}(h) \cup \sigma(\text{supp}(h))$  qui est un compact fixé. De ce fait, on peut choisir, pour tout  $k$ ,  $g'_k \in \text{Pol}_{f_k}$  tel que  $\|g'_k - f_k^*\|_p \leq \frac{1}{k}$ .

Écrivons  $g'_k = f_k^{\sigma_1 \cdots \sigma_{s(k)}}$  et posons  $g_k = f^{\sigma_1 \cdots \sigma_{s(k)}} \in \text{Pol}_f$ .

- 2<sup>ème</sup> étape : Vérifier que  $(g_k)$  tend fortement vers  $f^*$  dans  $L^p$ .

Il suffit d'écrire tout ce qu'on sait :

$$\begin{aligned} \|g_k - f^*\|_p &\leq \|g_k - g'_k\|_p + \|g'_k - f_k^*\|_p + \|f_k^* - f^*\|_p \\ &= \|f^{\sigma_1 \cdots \sigma_{s(k)}} - f_k^{\sigma_1 \cdots \sigma_{s(k)}}\|_p + \|g'_k - f_k^*\|_p + \|f_k - f\|_p \\ &\leq \|f - f_k\|_p + \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \\ &\leq \frac{3}{k} \longrightarrow 0 \end{aligned} \quad (\text{Thm. 21})$$

- 3<sup>ème</sup> étape : Vérifier que  $(\nabla g_k)$  tend faiblement vers  $\nabla f^*$  dans  $(L^p)^n$ .

En vertu de l'identité de PÓLYA-SZEGŐ pour les polarisations, on a  $\|\nabla g_k\|_p = \|\nabla f\|_p$ , la suite  $(\nabla g_k)$  est donc bornée dans  $(L^p)^n$ . En appliquant le théorème de KAKUTANI et le théorème d'EBERLEIN-ŠMULIAN, on voit que  $(\nabla g_k)$  admet une sous suite faiblement convergente. Quitte à extraire, on peut donc supposer que  $(\nabla g_k)$  converge faiblement.

Montrons que  $\nabla f^*$  est le seul candidat possible pour la limite faible : Notons  $T$  la limite faible de la suite  $(\nabla g_k)$ . Par définition on a, pour tout  $i$ ,

$$\int (\partial_i g_k) \varphi \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \int T_i \varphi \quad \forall \varphi \in L^q$$

où  $q$  est l'exposant conjugué de  $p$ . En particulier, cela est vrai pour tout  $\varphi \in C_c^\infty$ . En faisant une intégration par parties, en appliquant le théorème de convergence dominée à  $-\int g_k (\partial_i \varphi)$ , puis en refaisant une intégration par parties en sens inverse, on obtient alors à la limite :

$$\int (T_i - \partial_i f^*) \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty.$$

Pour  $p \neq 1$ , la densité de  $C_c^\infty$  dans  $L^q$  nous permet de conclure que  $T_i = \partial_i f^*$ . Pour  $p = 1$ , on utilise le lemme suivant :

**Lemme 32.** Soit  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction mesurable. Supposons que

$$\int_{]a, b[} h = 0$$

pour tout  $]a, b[ = ]a_1, b_1[ \times \cdots \times ]a_n, b_n[ \in \mathbb{R}^n$ . Alors  $h = 0$ .

**Preuve.** Posons  $h_+$  et  $h_-$  respectivement les parties positive et négative de  $h$ , et les mesures positives  $d\nu_+ = h_+ d\lambda$  et  $d\nu_- = h_- d\lambda$  où  $\lambda$  désigne la mesure de LEBESGUE. On a, pour tout  $]a, b[ \in \mathbb{R}^n$ ,  $\nu_+(]a, b[) = \nu_-(]a, b[)$ . Or  $\nu_+$  et  $\nu_-$  sont des mesures boréliennes positives,  $\sigma$ -finies, donc le théorème d'unicité des mesures implique  $\nu_+ = \nu_-$ . Ainsi,

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x) \mathbb{1}_{\{h>0\}}(x) d\lambda(x) = \nu_+(\{h > 0\}) = \nu_-(\{h > 0\}) = 0.$$

Or  $h\mathbb{1}_{\{h>0\}}$  est une fonction positive donc  $h\mathbb{1}_{\{h>0\}} = 0$ . De même,  $h\mathbb{1}_{\{h<0\}} = 0$ . Donc  $h = 0$ .  $\square$

Revenons à la preuve de la propriété. Il ne nous reste qu'à montrer que si  $h \in L^1$  vérifie

$$\forall \varphi \in C_c^\infty, \int h\varphi = 0$$

alors  $h$  est nulle.

Pour ce faire, notons que pour tout choix de  $]a, b[ \in \mathbb{R}^n$ , la fonction indicatrice  $\mathbb{1}_{]a, b[}$  est LEBESGUE-intégrable. On sait qu'il existe une suite  $(t_n)_{n \geq 1}$  de fonctions  $C_c^\infty$  à valeurs dans  $[0, 1]$  telle que  $t_n \rightarrow \mathbb{1}_{]a, b[}$  p.p. lorsque  $n \rightarrow \infty$ . En utilisant l'hypothèse sur  $h$  et en passant à la limite par convergence dominée, cela implique que

$$\int h\mathbb{1}_{]a, b[} = 0 \quad \text{quel que soit } ]a, b[,$$

le lemme précédent s'applique et donc  $h = 0$ .

Cela prouve définitivement la propriété.  $\square$

**Théorème 33** (Inégalité de PÓLYA-SZEGŐ). Soient  $p \in [1, +\infty]$  et  $f \in W^{1,p}$ . On a

$$\|\nabla f\|_p \geq \|\nabla f^*\|_p.$$

**Preuve.** Pour  $p = +\infty$ ,  $f$  est  $\|\nabla f\|_\infty$ -lipschitzienne. Sachant que le réarrangement renforce le module de continuité,  $f^*$  est également  $\|\nabla f\|_\infty$ -lipschitzienne. Ce cas est donc clair.

Pour  $p \in [1, +\infty[$ , la propriété précédente garantit l'existence d'une suite  $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$  dans  $\text{Pol}_f$  telle que

- $g_k$  tende fortement vers  $f^*$  dans  $L^p$ .
- $\nabla g_k$  tende faiblement vers  $\nabla f^*$  dans  $(L^p)^n$ .

Pour tout  $k$ ,  $g_k \in \text{Pol}_f$  donc  $\|\nabla g_k\|_p = \|\nabla f\|_p$ . Il ne reste qu'à passer à la limite : puisque que la  $p$ -norme est convexe, elle est faiblement semicontinue à gauche, et on a donc bien

$$\|\nabla f\|_p = \lim_{k \rightarrow +\infty} \|\nabla g_k\|_p \geq \left\| \lim_{k \rightarrow +\infty} \nabla g_k \right\|_p = \|\nabla f^*\|_p.$$

$\square$

### 3.3 L'inégalité isopérimétrique classique

Dans cette sous-section, nous allons établir l'inégalité isopérimétrique classique et voir quelques-unes de ses applications.

**Théorème 34** (Inégalité isopérimétrique). Soit  $A$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $\partial A$  soit une sous-variété orientable  $C^1$  de  $\mathbb{R}^n$ , alors

$$\text{Per}(A) \geq \text{Per}(A^*).$$

**Preuve.** Notons d'abord que le terme de gauche a bien un sens car la bornitude de  $A$  impose que  $\partial A$  soit une variété compacte (sans bord). Rappelons la formule suivante :

**Propriété 35** (Formule de la co-aire). Si  $f \in W^{1,p}$ , alors

$$\int g(x)|\nabla f(x)|dx = \int_0^{+\infty} \int_{f^{-1}(t)} g(x)d\sigma_{n-1}(x)dt$$

lorsque le terme de gauche a un sens. Il faut faire attention au fait que l'intégrale de gauche se fait pour la mesure de LEBESGUE, tandis que  $\sigma_{n-1}$  est la mesure de HAUSDORFF de dimension  $n - 1$ .

Une conséquence immédiate de la formule de co-aire est l'identité suivante :

$$\|\nabla f\|_1 = \int_0^{+\infty} \text{Per}(\{f > t\})dt. \quad (3.1)$$

Prenons d'abord une fonction  $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que :

- $\rho$  est  $C^\infty$  et à support dans  $B(0, 1)$ .
- $\rho$  est d'intégrale 1.

On définit  $\rho_k : x \mapsto k\rho(kx)$ .

Définissons  $f_k = \chi_A * \rho_k$ . Puisque les fonctions  $f_k$  sont de classe  $C^\infty$ , elles sont dans  $W^{1,p}$  quel que soit  $p$ . Nous avons donc le droit de prendre  $f = f_k$  (ainsi que  $f = f_k^*$ ) dans l'équation (3.1), puis de combiner ceci avec l'inégalité de PÓLYA-SZEGŐ pour obtenir :

$$\int_0^{+\infty} \text{Per}(\{f_k > t\})dt = \int |\nabla f_k(x)|dx \geq \int |\nabla f_k^*(x)|dx = \int_0^{+\infty} \text{Per}(\{f_k^* > t\})dt.$$

Nous allons à présent montrer que le terme de droite tend vers  $\text{Per}(A^*)$  et que le terme de gauche est toujours inférieur ou égal à  $\text{Per}(A)$ .

Commençons par le terme de droite. Par un petit calcul on voit que

$$\chi_A * \rho_k(x) = \int_{B(0,1)} \chi_A\left(x - \frac{y}{k}\right) \rho(y)dy.$$

Ainsi, pour tout  $0 \leq t < 1$ , nous avons

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\{f_k^* > t\}) &\geq \text{Vol}\left(\left\{x \in A \mid d(x, \partial A) \geq \frac{1}{k}\right\}\right) \\ \text{et } \text{Vol}(\{f_k^* > t\}) &\leq \text{Vol}\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, A) \leq \frac{1}{k}\right\}\right) \\ &\leq \text{Vol}(A \cup \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, \partial A) \leq 1\}) \end{aligned}$$

La convergence  $\text{Vol}(\{f_k^* > t\}) \rightarrow \text{Vol} A$  est donc garantie par les deux premières estimations. Les ensembles  $\{f_k^* > t\}$  et  $A^*$  étant des boules, on a une identité du type  $\text{Per} = c_n \text{Vol}^{\frac{n-1}{n}}$ . Ainsi

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \text{Per}(\{f_k^* > t\})dt &= \int_0^1 \text{Per}(\{f_k^* > t\})dt \\ &= \int_0^1 c_n \text{Vol}(\{f_k^* > t\})^{\frac{n-1}{n}} dt \\ &\rightarrow \int_0^1 c_n \text{Vol}(A^*)^{\frac{n-1}{n}} dt \quad (\text{convergence dominée}) \\ &= \text{Per}(A^*). \end{aligned}$$

Avant de nous intéresser au terme de gauche, rappelons d'abord le résultat suivant :

**Théorème 36** (Inégalité intégrale de MINKOWSKI). Soient  $(X, A, \mu)$  et  $(Y, B, \nu)$  deux espaces mesurés  $\sigma$ -finis et  $\varphi$  une fonction mesurable positive sur leur produit. Alors, pour tout  $p \in ]1, +\infty[$  :

$$\left( \int_X \left( \int_Y \varphi(x, y) d\nu(y) \right)^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int_Y \left( \int_X \varphi(x, y)^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} d\nu(y) \right).$$

**Preuve.** Notons  $F$  la fonction définie pour  $\mu$ -p.p  $x \in X$  par  $F(x) = \int_Y \varphi(x, y) d\nu(y)$ . Soit  $(X_n)_{n \geq 1} \in X^{\mathbb{N}}$  une suite croissante telle que  $X = \cup_{n \geq 1} X_n$  et telle que  $\mu(X_n) < +\infty$  pour tout  $n \geq 1$ . On note  $\Gamma_n = X_n \cap \{|F| \leq n\}$ . On a :

$$\begin{aligned} \int_X |F(x)|^p \chi_{\Gamma_n}(x) d\mu(x) &= \int_X |F(x)|^{p-1} \left( \int_Y \varphi(x, y) d\nu(y) \right) \chi_{\Gamma_n}(x) d\mu(x) \\ &= \int_Y d\nu(y) \left( \int_X |F(x)|^{p-1} \varphi(x, y) \chi_{\Gamma_n}(x) d\mu(x) \right) && \text{(FUBINI-TONELLI)} \\ &\leq \int_Y d\nu(y) \left( \int_X |F(x)|^p \chi_{\Gamma_n}(x) d\mu(x) \right)^{1-\frac{1}{p}} \|\varphi(\cdot, y)\|_{L^p(\mu)} && \text{(HÖLDER)}. \end{aligned}$$

Or par construction de  $\Gamma_n$ , on a  $\int_X |F(x)|^p \chi_{\Gamma_n}(x) d\mu(x) < +\infty$ , d'où

$$\left( \int_X |F(x)|^p \chi_{\Gamma_n}(x) d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_Y d\nu(y) \|\varphi(\cdot, y)\|_{L^p(\mu)}.$$

L'intégrabilité de  $\varphi$  impose que  $F < +\infty$   $\mu$ -p.p., on en déduit donc que la suite  $(\chi_{\Gamma_n})_{n \geq 1}$  tend  $\mu$ -p.p. de manière croissante vers 1. Il ne reste alors qu'à utiliser le théorème de convergence monotone pour avoir l'inégalité.  $\square$

Regardons à présent le terme de gauche. On sait, par inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f_k| = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} -\nabla f_k \cdot V \mid V \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), |V| \leq 1 \right\}.$$

Par conséquent, afin de montrer que  $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f_n(x)| \leq \text{Per}(A)$ , il suffit d'établir

$$\int -\nabla f_k \cdot V \leq \text{Per}(A) \tag{3.2}$$

pour tout champ de vecteur  $V$  à support compact et de norme constante égale à 1.

On évalue le terme de gauche de (3.2) par une IPP :

$$\int -\nabla f_k \cdot V = \int f_k \text{Div} V = \int_A \text{Div} V^{(k)} = \int_{\partial A} V^{(k)} \cdot \nu$$

avec  $V^{(k)}$  le champ de vecteur défini par  $(V^{(k)})_i = \rho_k * V_i$  sur chaque composante  $i$  et  $\nu$  le vecteur sortant déterminé par l'orientation de  $\partial A$ . Pour la deuxième égalité, on a utilisé le fait que  $\int (a * b)c = \int a(b * c)$  lorsque les intégrales ont un sens. Il reste à majorer  $V^{(k)} \cdot \nu$  par 1.

Soit un point  $z \in \partial A$  quelconque, on veut montrer que  $|V^{(k)}(z) \cdot \nu(z)| \leq 1$ . On choisit pour  $(X, \mu)$  l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$  muni de la mesure de comptage et pour  $(Y, \nu)$  l'ensemble  $\mathbb{R}^n$  muni de la mesure de LEBESGUE. On fixe également  $p = 2$  et  $\varphi(x, y) = |\rho_k(z - y)V_x(y)|$ .

L'inégalité intégrale de MINKOWSKI nous montre alors que

$$\begin{aligned} \left( \sum_{x=1}^n \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\rho_k(z-y)V_x(y)| dy \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left( \sum_{x=1}^n (|\rho_k(z-y)V_x(y)|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\rho_k(z-y)| |V(y)| dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\rho_k(z-y)| dy = 1, \end{aligned}$$

et donc  $|V^{(k)}(z) \cdot \nu(z)| \leq 1$ , ce qu'il nous fallait. Ceci conclut la preuve.  $\square$

**Théorème 37** (Une reformulation de l'inégalité isopérimétrique). *Soit  $A$  une partie bornée de  $\mathbb{R}^n$  telle que  $\partial A$  soit une sous-variété  $C^1$  de  $\mathbb{R}^n$ . On a*

$$\text{Per}(A) \geq n(\omega_n)^{\frac{1}{n}} \text{Vol}(A)^{\frac{n-1}{n}}.$$

**Remarque 38.** *Soit  $A$  une partie bornée de  $\mathbb{R}^n$ . Si on peut approximer  $A$  par une suite  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathbb{R}^n$  qui sont de bord lisse, alors l'inégalité isopérimétrique est valable pour  $A$  par passage à la limite.*

*Ainsi, l'inégalité isopérimétrique est valable pour un polygone à  $n$  côtés, un cube, une lunule, etc.*

On présente ici quelques résultats qui utilisent l'inégalité isopérimétrique et qui sont très intéressants, quoiqu'élémentaires.

**Exemple 39 (Un quadrangle d'aire maximum est inscriptible).** *Étant données 4 longueurs  $d_1, \dots, d_4$ , nous cherchons à savoir quel est le quadrangle d'aire maximale parmi ceux dont les arêtes ont ces longueurs.*

*Il se trouve qu'un quadrangle est d'aire maximale lorsqu'il est inscriptible (c'est-à-dire que ses sommets sont sur un cercle). En effet, prenons n'importe quel quadrangle de côtés  $d_1, \dots, d_4$ , et considérons un quadrangle inscriptible  $C$  avec les mêmes longueurs d'arêtes. Traçons le cercle circonscrit à  $C$ , puis notons  $R_1, \dots, R_4$  les quatre régions comprises entre les côtés de  $C$  et le cercle circonscrit. En recollant  $R_1, \dots, R_4$  sur les côtés correspondants du quadrangle initial, on obtient une autre figure qui a le même périmètre que le cercle circonscrit de  $C$ . On conclut ainsi par l'inégalité isopérimétrique classique.*

**Exemple 40 (Contrôle de l'aire d'un polygone par les distances entre ses sommets).** *Soit un polygone  $P$  tel que la distance entre chaque paire de sommets (y compris s'ils ne sont pas joints par une arête) soit inférieure ou égale à 1. Montrons que son aire est inférieure ou égale à  $\pi/4$ , et que cette majoration est optimale.*

*Pour toute droite  $l$  formant un angle  $\theta \in [0, \pi]$  avec l'horizontale, désignons par  $r(\theta)$  la longueur de la projection du polygone sur  $l$ . Il est connu que*

$$\text{Per}(P) = \int_0^\pi r(\theta) d\theta.$$

*Or pour tout  $\theta \in [0, \pi]$ ,  $r(\theta) \leq 1$ , il s'ensuit que  $\text{Per}(P) \leq \pi$ , et on conclut toujours par l'inégalité isopérimétrique classique.*

**Exemple 41 (La courbe de longueur minimale divisant un triangle équilatéral en deux régions de même aire).** *Soit  $T$  un triangle équilatéral. Parmi les courbes divisant  $T$  en deux régions de même aire, laquelle est de longueur minimale ?*

*Soit  $C$  une telle courbe, supposée minimale. Il y a trois possibilités :*

- Si  $C$  est une courbe fermée dans  $T$ , alors par l'inégalité isopérimétrique,  $C$  est un cercle.
- Si  $C$  n'est pas une courbe fermée et qu'elle rencontre une arête de  $T$ , alors en adjoignant à la courbe son symétrique par rapport à l'arête de rencontre, on obtient une courbe fermée et on complète le triangle en un losange. Par l'inégalité isopérimétrique,  $C$  est un demi-cercle.
- Si  $C$  n'est pas une courbe fermée et qu'elle rencontre deux arêtes de  $T$ , on adjoint à  $C$  des symétriques jusqu'à obtenir une courbe fermée, ce qui fait du triangle un hexagone régulier. Toujours selon l'inégalité isopérimétrique,  $C$  est un arc de cercle parcourant un angle de  $\frac{\pi}{3}$ .

Il ne reste alors qu'à évaluer ces longueurs. Un calcul explicite montre que le dernier cas donne la longueur la plus faible.

On peut aussi se servir de l'inégalité isopérimétrique pour démontrer celle de PÓLYA-SZEGŐ. Commençons par montrer un lemme :

**Lemme 42** (Volume de l'ensemble des points réguliers). *Soit  $f$  une fonction lisse, alors pour tout  $t_1 < t_2$ , on a*

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{f^{-1}(t)} |\nabla f|^{-1} d\sigma dt = \text{Vol}(\{x \mid t_1 < f(x) \leq t_2, |\nabla f| \neq 0\})$$

**Preuve.** La formule de la co-aire implique

$$\int_{\{x \mid t_1 < f(x) \leq t_2\}} (\epsilon + |\nabla f|)^{-1} |\nabla f| dx = \int_{t_1}^{t_2} \int_{f^{-1}(t)} (\epsilon + |\nabla f|)^{-1} d\sigma dt.$$

L'égalité voulue s'obtient en faisant  $\epsilon \rightarrow 0^+$  (le théorème de convergence monotone justifie le passage à la limite).  $\square$

On peut désormais donner une autre preuve de l'inégalité de PÓLYA-SZEGŐ.

**Preuve.** Le volume de l'ensemble des points critiques décroît par réarrangement symétrique, ce qu'on admet. Vu le lemme précédent, cela montre que pour presque tout  $t$ , on a :

$$\int_{f^{-1}(t)} |\nabla f|^{-1} d\sigma \leq \int_{(f^*)^{-1}(t)} |\nabla f^*|^{-1} d\sigma.$$

D'autre part, la formule de la co-aire donne :

$$\int |\nabla f(x)|^p dx = \int_0^\infty \int_{f^{-1}(t)} |\nabla f|^{p-1} d\sigma dt.$$

En appliquant l'inégalité de JENSEN sur la fonction convexe  $s \mapsto s^{-(p-1)}$  il s'ensuit que

$$\int_{f^{-1}(t)} |\nabla f|^{p-1} \frac{d\sigma}{\text{Per}(\{f > t\})} \geq \left( \int_{f^{-1}(t)} |\nabla f|^{-1} \frac{d\sigma}{\text{Per}(\{f > t\})} \right)^{-(p-1)}.$$

Ainsi, puisque l'inégalité isopérimétrique donne  $\text{Per}(\{f > t\}) \geq \text{Per}(\{f^* > t\})$ , on a :

$$\begin{aligned} \int_{f^{-1}(t)} |\nabla f|^{p-1} d\sigma &\geq \text{Per}(\{f > t\})^p \cdot \left( \int_{f^{-1}(t)} |\nabla f|^{-1} d\sigma \right)^{-(p-1)} \\ &\geq \text{Per}(\{f^* > t\})^p \cdot \left( \int_{(f^*)^{-1}(t)} |\nabla f^*|^{-1} d\sigma \right)^{-(p-1)} \\ &= \int_{(f^*)^{-1}(t)} |\nabla f^*|^{p-1} d\sigma \end{aligned}$$

La dernière égalité utilise le fait que l'inégalité de JENSEN est une égalité pour les fonctions symétriques décroissantes, puisqu'on remarque qu'alors  $|\nabla f^*|$  est constant sur tout ensemble de niveau. Il ne reste qu'à intégrer sur  $t$  pour obtenir l'inégalité désirée.  $\square$



# Chapitre 4

## Autres réarrangements

### 4.1 Argument classique pour l'inégalité isopérimétrique

La preuve de STEINER de l'inégalité isopérimétrique tient en ceci : on fixe un convexe  $C$  compact à bord  $C^1$ , qu'on représente par deux fonctions  $h_+$  et  $h_-$  de classe  $C^1$  sur un intervalle  $[a, b]$ , de sorte que  $C = \bigcup_{x \in [a, b]} [h_-(x), h_+(x)]$ .

L'aire et le périmètre de  $C$  se calculent alors selon les formules suivantes :

$$\text{Vol}(C) = \int_a^b (h_+(x) - h_-(x)) dx$$

$$\text{Per}(C) = \int_a^b \left( \sqrt{1 + (h'_+(x))^2} + \sqrt{1 + (h'_-(x))^2} \right) dx$$

La stratégie de STEINER est d'optimiser ces intégrales « ponctuellement » : à  $x$  fixé, en gardant la différence  $h_+(x) - h_-(x)$  constante, il faut avoir la valeur la plus faible possible de  $\sqrt{1 + (h'_+(x))^2} + \sqrt{1 + (h'_-(x))^2}$ .

Il se trouve qu'un calcul rapide montre que  $t \mapsto \sqrt{1 + t^2}$  est une fonction strictement convexe. On sait donc que, dès que  $h'_+(x) \neq h'_-(x)$  :

$$\frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + (h'_+(x))^2} + \sqrt{1 + (h'_-(x))^2} \right) < \sqrt{1 + \left( \frac{h'_+(x) + h'_-(x)}{2} \right)^2}$$

Un choix naturel est donc de poser  $k_+(x) = \frac{h_+(x) - h_-(x)}{2}$  et  $k_-(x) = -k_+(x)$ . On a ainsi :

$$k_+(x) - k_-(x) = h_+(x) - h_-(x)$$

$$\sqrt{1 + (h'_+(x))^2} + \sqrt{1 + (h'_-(x))^2} \leq \sqrt{1 + (k'_+(x))^2} + \sqrt{1 + (k'_-(x))^2}$$

En intégrant, on a l'inégalité voulue, avec inégalité stricte dès qu'on n'a pas  $h_- = -h_+$  presque partout. La stricte convexité montre que, parmi les réarrangements "valeur de  $x$  par valeur de  $x$ " qu'on pouvait faire, celui-ci est le meilleur.

Si on regarde le convexe compact obtenu, c'est un ensemble  $\mathcal{SC} = \bigcup_{x \in [a, b]} [k_-(x), k_+(x)]$  symétrique par rapport à l'axe des abscisses, de même volume que  $C$  et de périmètre plus petit. On peut en fait écrire  $\mathcal{SC} = \bigcup_{x \in [a, b]} [h_-(x), h_+(x)]^*$ .

Une conclusion tirée de cette observation est la suivante : si un ensemble ayant un rapport aire/périmètre optimal existe, il doit nécessairement être symétrique par rapport à l'axe des abscisses et (puisqu'on peut réitérer ce raisonnement après avoir fait n'importe quelle rotation) par rapport à n'importe quel axe. Il doit donc s'agir d'une boule.

Le raisonnement ne donne pas l'existence d'un ensemble optimisant. Pour ceci, il faut utiliser des principes plus forts comme le théorème de compacité de DE GIORGI. En revanche, la méthode suggère la définition de nouveaux réarrangements qui, comme  $\mathcal{S}C$ , se contentent de rendre les objets symétriques selon quelques dimensions seulement.

## 4.2 Généralités

**Définition 43.** Soit une partie mesurable  $A \subset \mathbb{R}^n$ . On définit :

- Si  $\hat{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$ ,  $A_{\hat{x}}$  est l'ensemble des  $t \in \mathbb{R}$  tels que  $(\hat{x}, t) \in A$ .
- Si  $t \in \mathbb{R}$ ,  $A^t$  est l'ensemble des  $\hat{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$  tels que  $(\hat{x}, t) \in A$ .
- Le réarrangement de STEINER :

$$\mathcal{S}A = \bigcup_{\hat{x} \in \mathbb{R}^{n-1}} \{\hat{x}\} \times A_{\hat{x}}^*$$

- Le réarrangement de SCHWARTZ :

$$\mathcal{T}A = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} (A^t)^* \times \{t\}$$

Ces deux réarrangements consistent à effectuer des réarrangements symétriques selon certaines dimensions uniquement. Pour cette raison, ils ont des propriétés (inégalités, etc.) analogues à celles de la symétrisation. On peut noter le lemme suivant :

**Lemme 44.**  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{T}$  réduisent la différence symétrique.

C'est-à-dire que :

$$\text{Vol}(\mathcal{S}A \Delta \mathcal{S}B) \leq \text{Vol}(A \Delta B)$$

$$\text{Vol}(\mathcal{T}A \Delta \mathcal{T}B) \leq \text{Vol}(A \Delta B)$$

où  $A \Delta B$  désigne l'ensemble  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

**Preuve.** Que ce soit pour  $\mathcal{S}$  ou pour  $\mathcal{T}$ , cela revient à effectuer un réarrangement symétrique dans les sections selon certaines dimensions sans toucher aux autres. Puisqu'on peut calculer le volume à partir du volume des sections comme une intégrale, il suffit donc de montrer le résultat pour le réarrangement symétrique.

Dans le cas de boules  $A^*$  et  $B^*$ , si par exemple  $\text{Vol}(B^*) \geq \text{Vol}(A^*)$  alors  $A^* \Delta B^*$  est simplement la couronne  $B^* \setminus A^*$ , on a donc :

$$\text{Vol}(A^* \Delta B^*) = |\text{Vol}(B^*) - \text{Vol}(A^*)| = |\text{Vol}(B) - \text{Vol}(A)|$$

On sait que  $A \cup B = (A \Delta B) \cup (A \cap B)$ , l'union étant disjointe. On peut donc calculer :

$$\text{Vol}(A \Delta B) = \text{Vol}(A \cup B) - \text{Vol}(A \cap B) = \text{Vol}(A) + \text{Vol}(B) - 2 \text{Vol}(A \cap B)$$

Or  $\text{Vol}(A \cap B) \leq \text{Vol}(A)$  d'où :

$$\text{Vol}(A \Delta B) \geq \text{Vol}(B) - \text{Vol}(A)$$

et de même  $\text{Vol}(A \cap B) \leq \text{Vol}(B)$  donc :

$$\text{Vol}(A \Delta B) \geq \text{Vol}(A) - \text{Vol}(B)$$

ce qui montre définitivement le résultat.  $\square$

### 4.3 Convergence « compétitive »

Si on veut maximiser une fonctionnelle  $I$ , ou une application qui prend comme argument un ensemble, une technique générale consiste à répéter infiniment les deux opérations suivantes :

- On symétrise l'ensemble (ou la fonction), par exemple avec  $S$  ou  $\mathcal{T}$
- On agit sur l'ensemble (ou la fonction) de manière à détruire la symétrie créée

où les deux opérations sont choisies de manière à ce que chacune diminue l'image de l'ensemble (ou de la fonction) par  $I$ . On a alors un bon espoir d'avoir d'une part une convergence, et d'autre part d'obtenir à la limite un objet qui maximise la fonctionnelle.

Nous allons illustrer ce principe sur l'exemple suivant :

**Théorème 45.** Soit  $\mathcal{R}$  une application linéaire sur  $\mathbb{R}^n$  qui n'agit pas sur les coordonnées  $x_2, \dots, x_{n-1}$  et qui agit comme une rotation d'angle irrationnel<sup>1</sup> dans le plan  $(x_1, x_n)$ .

Alors pour toute partie  $A \subset \mathbb{R}^n$  de volume fini, on a :

$$(\mathcal{T}\mathcal{S}\mathcal{R})^k A \longrightarrow A^*$$

où  $E_k \rightarrow E$  signifie que  $\text{Vol}(E_k \Delta E) \rightarrow 0$ .

**Preuve.** On pose  $A_k = (\mathcal{T}\mathcal{S}\mathcal{R})^k A$ .

Par approximation compacte, on peut se contenter de montrer le résultat pour des compacts. On suppose donc  $A$  compact et on fixe une boule  $B$  dans laquelle il est inclus. On a  $A_k \subset (\mathcal{T}\mathcal{S}\mathcal{R})^k B = B$  donc  $(A_k)$  est une suite uniformément bornée de compacts.

Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on pose  $h_k(t) = \text{Vol}_{\mathbb{R}^{n-1}}(A_k^t)$ . Dès que  $k \geq 1$ , les  $h_k$  sont des fonctions à valeurs réelles, paires, décroissantes sur  $\mathbb{R}^+$ , uniformément bornées et à supports dans un même compact, d'après le fait précédent.

D'après le théorème de sélection de HELLY, il existe donc une sous-suite  $h_{j_k}$  de  $h_k$  qui converge presque partout vers une fonction  $h_\infty$ .

En écrivant :

$$A_k = \left\{ (\hat{x}, t) \mid |\hat{x}| < \left( \frac{h_k(t)}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{1}{n-1}} \right\}$$

Et en posant :

$$A_\infty = \left\{ (\hat{x}, t) \mid |\hat{x}| < \left( \frac{h_\infty(t)}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{1}{n-1}} \right\}$$

1. Cela signifie que l'angle est de la forme  $q\pi$  où  $q$  est irrationnel.

On obtient

$$\text{Vol}(A_{j_k} \Delta A_\infty) = \int \left| \left( \frac{h_\infty(t)}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{1}{n-1}} - \left( \frac{h_{j_k}(t)}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{1}{n-1}} \right| dt$$

L'intégrande est uniformément majorée par une constante et nulle en dehors d'un compact fixé. Elle converge en outre presque partout vers 0 et le théorème de convergence dominée nous donne donc bien  $\text{Vol}(A_{j_k} \Delta A_\infty) \rightarrow 0$ . De plus, on peut appliquer le même raisonnement à toute sous-suite : toute sous-suite de  $(A_k)$  possède une sous-suite convergente. Si on montre qu'il n'existe qu'une limite possible, on aura donc établi la convergence de  $(A_k)$  vers cette limite.

Supposons donc que  $A_{j_k}$  soit une sous-suite convergente de  $A_k$ , de limite  $A_\infty$ . On définit l'application suivante :

$$J(A) = \int_A e^{-(x^2+y^2)}$$

Admettons provisoirement le lemme suivant, qui sera prouvé dès la fin de cette preuve.

**Lemme 46.** *On a*

$$J(\mathcal{R}A) = J(A)$$

$$J(\mathcal{T}SA) \geq J(A)$$

*Avec égalité dans l'inégalité si et seulement si  $\text{Vol}(A \Delta \mathcal{T}SA) = 0$ , c'est-à-dire que  $A$  est symétrique par rapport à la dernière coordonnée (à un ensemble de mesure nulle près) et par rotation dans l'hyperplan  $(x_1, \dots, x_{n-1})$ .*

Par croissance de la suite (non extraite!)  $J(A_k)$ , celle-ci toute entière converge vers  $J(A_\infty)$  (qui est la limite de la suite extraite  $J(A_{j_k})$ ). On en déduit la propriété suivante :

$$J(A_\infty) = J(\mathcal{R}A_\infty) = J(\mathcal{T}S\mathcal{R}A_\infty)$$

Ainsi (d'après le cas d'égalité du lemme)  $\mathcal{R}A_\infty$  est un ensemble symétrique par rapport à la dernière coordonnée. Nous connaissons déjà cette propriété pour  $A_\infty$ .

Notons  $\Sigma$  la symétrie par rapport à la dernière coordonnée.  $A_\infty$  est invariant par deux symétries ( $\Sigma$  et  $\mathcal{R}^{-1}\Sigma\mathcal{R}$ ) et donc par tout le sous-groupe qu'elles engendrent.

Il se trouve que  $\mathcal{R}\Sigma\mathcal{R}^{-1}\Sigma = \mathcal{R}^2$  (pour des raisons qu'on peut comprendre géométriquement sans calculer les matrices en voyant que  $e^{i\theta} \overline{e^{-i\theta} \bar{z}} = e^{2i\theta} z$ ). En généralisant cette relation, on obtient que  $A_\infty$  est invariant par  $\mathcal{R}^n$  quel que soit  $n$ .

Ainsi,  $A_\infty$  est invariant par toute rotation (dans le plan  $(x_1, x_n)$ ) d'angle  $n\theta$  où  $\theta$  est l'angle de la rotation  $\mathcal{R}$ . Puisque  $\theta$  est irrationnel et par densité,  $A_\infty$  est invariant par toute rotation dans ce plan. On sait de plus que pour tout  $x_n$ ,  $A_\infty^{x_n}$  est une boule de  $\mathbb{R}^{n-1}$  et donc que  $A$  est invariant par toute rotation fixant la dernière coordonnée.

Il suffit pour conclure d'avoir le lemme d'algèbre suivant :

**Lemme 47.** *Soit une rotation  $U \in SO_n(\mathbb{R})$ . Alors  $U$  s'écrit comme un produit fini de rotations du plan  $(x_1, x_n)$  et de rotations de l'hyperplan  $(x_1, \dots, x_{n-1})$ .*

**Preuve.** Soit  $G$  l'ensemble des rotations vérifiant la conclusion et soit  $U$  une rotation vérifiant l'hypothèse. Notre stratégie va être de composer  $U$  à gauche par des rotations de  $G$  jusqu'à ce que  $e_n$  soit fixé. On aura alors le résultat.

Décomposons  $U(e_n)$  comme  $a + \beta e_n$  avec  $a \in Vect(e_1, \dots, e_{n-1})$ . Soit une rotation  $r_1$  de l'hyperplan  $Vect(e_1, \dots, e_{n-1})$  telle que  $r_1(a) = \alpha e_1$  pour un réel  $\alpha$ . Soit ensuite une rotation  $r_2$  du plan  $Vect(e_1, e_n)$  telle que  $r_2(\alpha e_1 + \beta e_n) = \gamma e_n$ . On sait que  $\|r_2(r_1(U(e_n)))\| = \|e_n\| = 1$  puisqu'on a composé des rotations, et donc (quitte à renverser la rotation) on a  $\gamma = 1$ . L'application  $r_2 \circ r_1 \circ U$  est une rotation qui fixe  $e_n$ , ce qui montre le résultat.  $\square$

En vertu du lemme précédent, une rotation quelconque de  $\mathbb{R}^n$  se décompose comme un produit fini de rotations dans le plan  $(x_1, x_n)$  et de rotations dans l'hyperplan  $(x_1, \dots, x_{n-1})$ , par lesquelles  $A_\infty$  est stable.  $A_\infty$  est donc invariant par toute rotation et donc (puisque'on a conservé le volume à tout instant) :

$$A_\infty = A^*$$

Ceci conclut la preuve du théorème.  $\square$

Démontrons désormais le lemme admis :

**Preuve.**

$$J(\mathcal{R}A) = \int_A e^{-\|\mathcal{R}x\|^2} dx = \int_A e^{-\|x\|^2} dx = J(A).$$

$$J(A) = \int_A e^{-\|x\|^2} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-\|\hat{x}\|^2} \int_{A_{\hat{x}}} e^{-t^2} dt d\hat{x}$$

L'inégalité  $\int_{A_{\hat{x}}} e^{-t^2} dt \leq \int_{A_{\hat{x}}^*} e^{-t^2} dt$  est claire : si on déplace toute la masse aussi près que possible de 0, la fonction  $e^{-t^2}$  étant symétrique et radialement décroissante, on augmente nécessairement la valeur de l'intégrale. Ainsi :

$$J(A) \leq J(\mathcal{S}A)$$

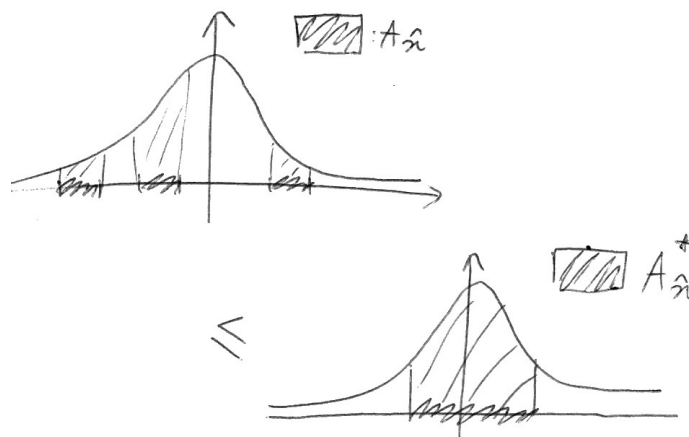


FIGURE 4.1 – Illustration graphique de l'inégalité  $\int_{A_{\hat{x}}} e^{-t^2} dt \leq \int_{A_{\hat{x}}^*} e^{-t^2} dt$

Pour des raisons analogues, on a  $J(A) \leq J(\mathcal{T}A)$ , et donc :

$$J(A) \leq J(\mathcal{T}SA)$$

Pour que le cas d'égalité soit obtenu, il faut qu'à ensemble de mesure nulle près, la masse soit déjà concentrée en zéro dès le départ, c'est-à-dire que  $A = \mathcal{S}A$ , puis que  $\mathcal{S}A = \mathcal{T}\mathcal{S}A$ , ce qui revient à dire :

$$A = \mathcal{T}\mathcal{S}A$$

□

Ce résultat illustre bien le principe décrit plus haut, et montre que le raisonnement de STEINER a du sens : en faisant des symétrisations de STEINER selon plein d'axes, on finit par avoir un ensemble parfaitement symétrique, c'est-à-dire une boule. L'objet obtenu à la limite donne bien un minimiseur de  $\text{Per}$ , comme on le sait en vertu de l'inégalité isopérimétrique, ce qui illustre la robustesse dans ce cas de la méthode décrite ci-dessus. On peut en fait montrer des résultats assez généraux de convergence dans un cadre plus large.

Le résultat ci-dessus permet de compléter l'argument de STEINER : on sait qu'en partant d'une forme quelconque (suffisamment régulière), on diminue son périmètre sans changer son aire chaque fois qu'on le symétrise selon un axe. Puisqu'on finit par avoir une boule en tournant à chaque fois cet axe d'un angle irrationnel, on sait donc que le périmètre initial était plus grand que celui de la boule de même aire. On obtient donc bien une forme de l'inégalité isopérimétrique.

# Conclusion

À l'issue de ces quelques chapitres, nous espérons être parvenus à communiquer un peu de l'intérêt et de la puissance qu'offrent les techniques développées tout au long de ce travail.

Nous n'avons pas parlé de tout ce dont nous aurions pu parler : des inégalités de RIESZ, de TALENTI, d'HARDY-LITTLEWOOD-SOBOLEV et d'autres, nous n'aurons rien vu sauf peut-être des cas particuliers.

Si nous avons préféré aborder un peu chaque grand principe plutôt que de détailler tout ce qu'il est possible d'évoquer, c'est que le sujet est large. Introduire des symétries à des objets pour tenter d'optimiser certaines fonctionnelles est un principe très général qui a des manifestations multiples.

En fait, le cadre est encore plus vaste : toutes les transformations que nous avons étudiées sont des formes particulières de *plans de transport*, qui sont des mesures qui décrivent une manière de réorganiser la masse des objets, et pour lesquelles on a des résultats très généraux, comme le théorème de BRENIER. Ce cadre général permet par exemple d'obtenir l'inégalité isopérimétrique par d'autres moyens.