Densités dans $\mathbb{N}^*$

Dans la suite, E désignera la fonction partie entière.

1 Densités

Soit $K \subset \mathbb{N}^*$, soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général $\alpha_n = \frac{1}{n}\left|K \cap \{1, \ldots, n\}\right|$ (bornée dans $[0, 1]$). On appelle densité inférieure de K la limite $d_*(K) = \liminf \alpha_n$ et densité supérieure de K la limite $d^*(K) = \limsup \alpha_n$. Si $d^*(K) = d_*(K)$, on dit que K a une densité et on note $d(K) = d^*(K) = d_*(K) = \lim \alpha_n$. On note L l'ensemble des parties de $\mathbb{N}^*$ qui ont une densité.

Exemple 1. $d(\mathbb{N}^*) = 1$. Si K est fini, $d(K) = 0$. $d(k\mathbb{N}^*) = \frac{1}{k}$ (car $\alpha_n = \frac{E(n/k)}{n} \sim \frac{1}{k}$).

Exemple 2. Si $\alpha \geqslant 1$ et $K = \{E(\alpha n), n \in \mathbb{N}^*\}$ alors $d(K) = \frac{1}{\alpha}$.

En effet, $E(\alpha k) \leqslant n \Leftrightarrow \alpha k < n+1 \Leftrightarrow k < \frac{n+1}{\alpha}$ donc $\left|K \cap \{1, \ldots, n\}\right| = E\left(\frac{n+1}{\alpha}\right) - 1 \sim \frac{n}{\alpha}$.

Remarque 3. Enlever ou ajouter un nombre fini d'éléments à une partie ne change pas ses densités ni son éventuelle appartenance ou non-appartenance à L.

Remarque 4. Si $A \cap B = \varnothing$ et $A, B \in L$, alors $A \sqcup B \in L$ et $d(A \sqcup B) = d(A) + d(B)$.

Remarque 5. Si $K \subset \mathbb{N}^*$, alors $d^*(\mathbb{N}^* - K) = 1 - d_*(K)$; $d_*(\mathbb{N}^* - K) = 1 - d^*(K)$. Si par ailleurs $K \in L$, alors $\mathbb{N}^* - K \in L$ et $d(\mathbb{N}^* - K) = 1 - d(K)$.

2 Résultats intéressants

Lemme 6. *Si $K, K' \in L$ et $d(K) + d(K') > 1$, alors K et K' possèdent une infinité d'éléments communs.*

Démonstration. En effet, supposons $D = K \cap K'$ fini (ou vide). En posant $M = K - D$ et $M' = K' - D$, on a $M \cap M' = \varnothing$ et $d(M \cup M') = d(M) + d(M') = d(K) + d(K') > 1$ qui est absurde (les densités citées existent grâce aux remarques 3 et 4).

On a en fait clairement $d_*(D) \geqslant d(K) + d(K') - 1 > 0$. □

Théorème 7. *Si $d_*(K) > 0$, alors $\sum_{k\in K} \frac{1}{k}$ diverge. (inutile pour l'exercice, mais cool)*

Démonstration. Posons $\alpha = d_*(K) > 0$. On sait $\exists n_0 \,/\, \forall n \geqslant n_0$, $\left|K \cap \{1, \ldots, n\}\right| \geqslant \frac{\alpha}{2} n$. En outre $S_n = \sum_{k\in K\cap\{1,\ldots,n\}} \frac{1}{k}$ est croissante donc a une limite l dans $\bar{\mathbb{R}}$. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\rho_d = \sum_{k\in K\cap\{1,\ldots,dn_0\}} \frac{1}{k}$. On sait qu'il y a au moins $\frac{\alpha}{2} n_0$ termes de cette somme correspondant à $k \in \{1, \ldots, n_0\}$, et donc supérieurs à $\frac{1}{n_0}$; il y en a aussi au moins $\frac{\alpha}{2} \times 2n_0$ pour $k \leqslant 2n_0$, supérieurs à $\frac{1}{2n_0}$, dont au moins $\left(\frac{\alpha}{2} 2n_0 - \frac{\alpha}{2} n_0\right) = \frac{\alpha}{2} n_0$ différents de ceux déjà considérés, et ainsi de suite. Cela nous permet de dire que $\rho_d \geqslant \frac{\alpha}{2} n_0 \times \frac{1}{n_0} + \left(\frac{\alpha}{2} 2n_0 - \frac{\alpha}{2} n_0\right) \times \frac{1}{2n_0} + \ldots + \left(\frac{\alpha}{2} dn_0 - \frac{\alpha}{2}(d-1)n_0\right) \times \frac{1}{dn_0} = \frac{\alpha}{2} \sum_{k=1}^{d} \frac{1}{k} \to +\infty$. ρ_d tend donc vers $+\infty$ d'où $l = +\infty$. □

Remarque 8. Se méfier de la réciproque !

Si on pose $K=\{n^2, n\in\mathbb{N}^*\}$, on a $d(K)=0$ (car $\frac{E(\sqrt{n})}{n}\to 0$) et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2}<+\infty$, en revanche si on pose $K'=\{E((n+1)\log(n+1)), n\in\mathbb{N}^*\}$, on a $d_*(K')=0$ (car $\frac{n}{n\log(n)}\to 0$) mais $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{E(n\log(n))}$ diverge ! (comparer à une série de Bertrand)

Théorème 9. *Soit deux ensemble infinis* $K=\{k_1<k_2<\ldots\}\subset\mathbb{N}^*$ *et* $K'=\{k'_1<k'_2<\ldots\}\subset\mathbb{N}^*$ *tels que* $k_n\sim k'_n$*. Alors* $\begin{cases} K\in L \text{ ssi } K'\in L \text{ et dans ce cas } d(K)=d(K') & (1)\\ d_*(K)=d_*(K') & (2)\\ d^*(K)=d^*(K') & (3)\end{cases}$.

Démonstration. Il suffit de montrer (2) et (3). Remarquons d'abord que $\frac{n}{k_n}=\frac{1}{k_n}\left|K\cap\{1,\ldots,k_n\}\right|$ a la même limite supérieure que α_n et que $\frac{n}{k_{n+1}-1}=\frac{1}{k_{n+1}-1}\left|K\cap\{1,\ldots,k_{n+1}-1\}\right|$ a la même limite inférieure que α_n en raison du caractère décroissant de α_n entre deux éléments de K.

Soit une extraction φ telle que $\frac{\varphi(n)}{k_{\varphi(n)+1}-1}\to d_*(K)$. On sait $\left|K'\cap\{1,\ldots,k'_{\varphi(n)+1}-1\}\right|=\varphi(n)$ et $k_{\varphi(n)}\sim k'_{\varphi(n)}$, et donc $\frac{1}{k'_{\varphi(n)+1}-1}\left|K'\cap\{1,\ldots,k'_{\varphi(n)+1}-1\}\right|\to d_*(K)$. $d_*(K)$ est donc une valeur d'adhérence de α_n, d'où $d_*(K')\leqslant d_*(K)$ (la lim inf est inférieure aux autres valeurs d'adhérence). De même $d_*(K)\leqslant d_*(K')$ d'où (2). (3) s'obtient de manière analogue, et le résultat est donc prouvé. $\square$

Exemple 10. Le théorème des nombres premiers donne $p_n\sim n\ln n\sim E(n\ln n)$, donc on en déduit $d(\mathcal{P})=0$ où $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers. On notera que $\sum_{p\in\mathcal{P}}\frac{1}{p}$ diverge.

Corollaire 11. *Si* $(k_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ *est telle que* $k_n=\alpha n+\beta+o(1)$ *avec* $\alpha>1$*, alors* $K=\{E(k_n), n\in\mathbb{N}^*\}$ *est de densité* $\frac{1}{\alpha}$.

Démonstration. En effet $k_{n+1}-k_n=\alpha+o(1)$ donc $k_{n+1}-k_n>1$ à partir d'un certain rang n_0, il n'y a donc qu'un nombre fini de termes de (k_n) dont la partie entière est identique. Si on pose $K=\{k'_1<k'_2<\ldots\}$, on a donc $\exists m/\forall n\geqslant n_0-m, k'_n=E(k_{n+m})$ d'où $k'_n=\alpha(n+m)+O(1)\sim\alpha n\sim E(\alpha n)$. Par théorème 9, K a donc la même densité que $\{E(\alpha n), n\in\mathbb{N}^*\}$, à savoir $\frac{1}{\alpha}$ (exemple 2). $\square$

Exercice 1. Soit α tel que $\alpha e^\alpha\in]1,2[$ (on peut prendre $\alpha=0.57$). On pose $K_\alpha=\left\{E\left(\frac{1}{e^\alpha-(1+\frac{1}{n})^{\alpha n}}\right), n\in\mathbb{N}^*\right\}$. Montrer que K_α contient une infinité d'éléments pairs et une infinité d'éléments impairs.

Solution. Commençons par développer $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha n}=\exp\left(\alpha n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=\exp\left(\alpha n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right)=\exp(\alpha)\exp\left(\frac{-\alpha}{2n}\right)\exp\left(\frac{\alpha}{3n^2}\right)+o\left(\frac{1}{n^2}\right)=e^\alpha\left(1-\frac{\alpha}{2n}+\frac{\alpha^2}{8n^2}\right)\left(1+\frac{\alpha}{3n^2}\right)+o\left(\frac{1}{n^2}\right)=e^\alpha-\frac{\alpha e^\alpha}{2n}+\frac{\alpha e^\alpha}{n^2}\left(\frac{1}{3}+\frac{\alpha}{8}\right)+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. On en déduit que $\frac{1}{e^\alpha-(1+\frac{1}{n})^{\alpha n}}=\frac{2n}{\alpha e^\alpha}+\frac{4}{\alpha e^\alpha}\left(\frac{1}{3}+\frac{\alpha}{8}\right)+o(1)$. L'hypothèse $\alpha e^\alpha<2$ garantit que nous sommes bien dans le cas du corollaire 11, et donc K_α est une partie de $\mathbb{N}^*$ de densité $\frac{\alpha e^\alpha}{2}>\frac{1}{2}$. L'ensemble des nombres pairs, comme celui des nombres impairs, a pour densité $\frac{1}{2}$, et le lemme 6 nous donne donc le résultat désiré. On a même que $\sum_{\left\{\substack{k\in K_\alpha\\ k \text{ pair}}\right.}\frac{1}{k}$ et $\sum_{\left\{\substack{k\in K_\alpha\\ k \text{ impair}}\right.}\frac{1}{k}$ sont toutes deux divergentes (théorème 7).

Théorème 12. *Soit* $(A_i)_{i\in\{1,\ldots,p\}}$ *une partition de* $\mathbb{N}^*$ *telle que* $\forall i\in\{1,\ldots,p\}, A_i\in L$*. Soit* $(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ *une suite telle que* $\forall i\in\{1,\ldots,p\}, \lim_{\left\{\substack{n\to\infty\\ n\in A_i}\right.} u_n=l_i$*. Alors en posant* $S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n u_i$*,* S_n *converge et a pour limite* $\sum_{i=1}^p l_i d(A_i)$.

Démonstration. En posant $T_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^p\sum_{k\in\{1,\ldots,n\}\cap A_i} l_i$ et $\alpha_{i,n}=\frac{1}{n}\left|\{1,\ldots,n\}\cap A_i\right|\xrightarrow[n\to+\infty]{} d(A_i)$, on a clairement $T_n=\sum_{i=1}^p l_i\alpha_{i,n}\to\sum_{i=1}^p l_i d(A_i)$. Soit $\varepsilon>0$. Il existe un rang n_0 à partir duquel on a $\forall i$, $\forall n\geqslant n_0$, $n\in A_i\Rightarrow|u_n-l_i|\leqslant\varepsilon$. Pour $n\geqslant n_0$, on a $S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1}u_k+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^p\sum_{k\in\{n_0,\ldots,n\}\cap A_i}u_k$. En posant $C=\left|\sum_{k=1}^{n_0-1}u_k-T_{n_0-1}\right|$, on a par ailleurs $n\geqslant n_0\Rightarrow|S_n-T_n|\leqslant\frac{C}{n}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^p\sum_{k\in\{n_0,\ldots,n\}\cap A_i}|u_k-l_i|\leqslant\frac{C}{n}+\frac{1}{n}\times(n-n_0+1)\times\varepsilon\xrightarrow[n\to+\infty]{}\varepsilon$. Il existe donc $n_1\geqslant n_0$ tel que $n\geqslant n_1\Rightarrow|S_n-T_n|\leqslant 2\varepsilon$, d'où $|S_n-T_n|\to 0$. On a donc $S_n\to\sum_{i=1}^p l_i d(A_i)$. $\square$