Deux semaines d'oraux X/ENS

1 X - ADS de Maths

Le sujet était le papier « Moins de coordonnées pour les moindres carrés » de Gérard Letac, disponible au format dvi ici : http://www.math.univ-toulouse.fr/~letac/car.dvi.

2 X - Maths 1

2.1 Exercice 1

Soit $K = \{(0,1),(1,0),(0,-1),(-1,0)\}$.

1. Déterminer l'ensemble D des isométries de $\mathbb{R}^2$ par lesquelles K est stable.

2. Montrer que D est un groupe non commutatif, engendré par deux de ses éléments R et S vérifiant $R^4 = S^2 = \mathrm{Id}$ et $RSR = S$.

3. Construire un morphisme de groupes φ de D dans $M_2(\mathbb{C})^\times$, injectif et tel que $\varphi(R) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ et $\varphi(S) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Existe-t-il une droite de $\mathbb{C}^2$ stable par tous les endomorphismes de $\varphi(D)$?

2.2 Exercice 2

1. On se donne un réel x. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \times \cos\left(\frac{x}{4}\right) \times \cdots \times \cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

2. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \times \cdots$ (le produit contient n facteurs).

2.3 Exercice 3

On dit qu'une suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifie la propriété C si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / m \geqslant n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_m - u_n| < \varepsilon$.

Montrer qu'une suite réelle vérifie la propriété C si et seulement si elle converge.

3 X - Maths 2

Pour tout $r \in \mathbb{R}^+$, on désigne par $B(r)$ l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} / |z| < r\}$.

Si f est une fonction continue sur le compact $\overline{B(r)}$, on note $M_r(f) = \sup_{z \in B(r)} |f(z)|$.

1. (**Question préliminaire**) Soit n fixé et $R > r > 0$. Montrer : $\exists C \in \mathbb{R} / \forall P \in \mathbb{C}_n[X]$, $M_R(f) \leqslant C \cdot M_r(f)$.

2. Soit $R > r_1 > r_2 > r_3 > 0$. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ et $\nu \in]0,1[$ tels que pour toute fonction f développable en série entière sur $B(R)$, on ait: $M_{r_2}(f) \leqslant C \cdot M_{r_1}(f)^\nu \cdot M_{r_3}(f)^{1-\nu}$.

(**Indication :** on pourra s'aider du calcul de $\int_0^{2\pi} f(te^{i\theta}) e^{-ni\theta} d\theta$ pour $t < R$)

4 X - Chimie

4.1 Exercice 1 (approximatif)

(Un exercice d'acide-base niveau Terminale, où il fallait déterminer un pK_a de deux manières différentes, une fois grâce au pH suite à la réaction avec l'eau, l'autre fois grâce à un titrage)

4.2 Exercice 2

La réaction $O_3 \to \frac{3}{2}O_2$ est catalysée par le Cl_2 selon ce mécanisme : $\left\{\begin{array}{llllll} Cl_2 & + & O_3 & \xrightarrow{k_1} & ClO^\bullet & + & ClO_2^\bullet \\ ClO_2^\bullet & + & O_3 & \xrightarrow{k_2} & ClO_3^\bullet & + & O_2 \\ ClO_3^\bullet & + & O_3 & \xrightarrow{k_3} & ClO_2^\bullet & + & 2O_2 \\ ClO_3^\bullet & + & ClO_3^\bullet & \xrightarrow{k_4} & Cl_2 & + & 3O_2 \end{array}\right.$

Montrer que la loi de vitesse du tout se met sous la forme $v = K[O_3]^{3/2}[Cl_2]^{1/2}$, en exprimant K.

(**Indication :** on remarquera que les radicaux réagissent facilement, et que leur concentration est donc faible et quasi-constante)

5 X - Physique

5.1 Exercice 1

On a un condensateur formé de deux cylindres de hauteur h, de rayons respectifs $a < b$ et de charges respectives $+q_0$ et $-q_0$, avec entre eux un isolant solide parfait. Il règne un champ $\vec{B}$ uniforme de la forme $\vec{B} = B(t)\vec{u_z}$, avec $B(0) = B_0$ et $\forall t \geqslant T, B(t) = 0$. Les deux condensateurs et l'isolant sont solidaires et tournent librement autour de leur axe (Oz), le moment d'inertie du tout valant J.

Y a-t-il rotation du système ? Si oui, déterminer sa vitesse angulaire finale.

5.2 Exercice 2

On a deux objets ponctuels A et B de masses respectives $m < M$. Calculer la déviation angulaire maximale de B lorsqu'on l'envoie sur A (immobile au départ) avec une vitesse v.

(L'examinateur m'a d'abord donné une formule incohérente pour le choc, qui excluait toute déviation angulaire, avant de me dire de simplement considérer l'énergie cinétique totale constante)

(**Indication :** on pourra se placer dans le référentiel barycentrique et regarder ce qu'il advient de la quantité de mouvement ainsi que de la norme de la vitesse des objets après le choc)

6 ENS - Physique LCR

6.1 Exercice 1

On considère une source ponctuelle monochromatique située au foyer F d'une lentille convergente de diamètre $2h$, d'épaisseur ε et d'indice n, et au centre de laquelle se trouve un trou de diamètre $2e$. Un écran est situé de l'autre côté, à une distance l de la lentille.

1. Que voit-on sur l'écran ? Calculer l'intensité lumineuse en un point situé à la distance z de l'axe, en distinguant cinq cas.

2. Calculer le nombre de franges ($f' = l = 20$cm; $h = 2e = 10$mm; $\varepsilon = 3$mm; $n = 1,57$; $\lambda = 560$nm).

6.2 Exercice 2

On parle toujours de lentille « sphérique ». Cependant, comme les « miroirs sphériques » dont on sait que la vraie forme est parabolique, cela n'est vrai que dans une certaine approximation.

En utilisant le théorème de Malus, déterminer la forme d'une lentille réelle.

(**Rappel sur les coniques :** la forme $y = y_0 \pm c\sqrt{r^2 - x^2}$ correspond à une ellipse, la forme $y = y_0 + cx^2$ à une parabole, la forme $y = y_0 \pm c\sqrt{r^2 + x^2}$ à une branche d'hyperbole)

7 ENS - Maths ULCR

Soit $E = C_{2\pi}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$.

Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L(E)^{\mathbb{N}}$ telle que : $\begin{cases} \forall n, \forall f \geqslant 0, T_n(f) \geqslant 0 \\ T_n(1) \xrightarrow{\text{cvu}} 1 \\ T_n(\cos) \xrightarrow{\text{cvu}} \cos \\ T_n(\sin) \xrightarrow{\text{cvu}} \sin \end{cases}$.

1. Soit, pour $f \in E$, $\Omega_f \colon \eta \in \mathbb{R}^{+\times} \mapsto \sup_{|x-y| \leqslant \eta} |f(x) - f(y)|$.

   Montrer que Ω_f est bien définie et que $\Omega_f(\eta) \xrightarrow[\eta \to 0^+]{} 0$.

2. Soit $g_y \colon x \mapsto 1 - \cos(x - y)$. On fixe $\eta \in \,]0, \pi]$ et $y \in \mathbb{R}$.

   Montrer que : $\left| T_n(f - f(y)) \right| \leqslant \Omega_f(\eta) T_n(1) + 2\|f\|_\infty \frac{T_n(g_y)}{1 - \cos\eta}$

3. Montrer que $\forall f \in E, T_n(f) \xrightarrow{\text{cvu}} f$.

8 ENS - Info LCR (approximatif)

On s'intéresse à un procédé de transmission qui doit transmettre un message M, contenant m mots de n bits chacun, en les répétant r fois. Chaque bit transmis a une probabilité p d'être effacé (remplacé par le symbole $\perp$), les effacements de bits étant tous mutuellement indépendants.

1. On fait l'hypothèse que les mots dont au moins un bit a été effacé sont ignorés. Quelle est la probabilité de pouvoir reconstituer M en entier ?

2. Quelle est la probabilité de pouvoir reconstituer un mot donné de M si cette fois, on n'ignore aucun mot ?

3. Comment doit évoluer r lorsque n tend vers $+\infty$ pour que la probabilité de retrouver M tende vers 1 ?

   A présent, le destinataire ne connaît ni r, ni m et les répétitions des mots se font de manière quelconque (pas nécessairement successives). On cherche à pouvoir reconstituer le message.

   On note M' l'ensemble des mots reçus. On appelle hypothèse un ensemble H de la forme de M tel que la probabilité de recevoir M' lorsque le message à transmettre est H est non nulle. On crée un graphe dont les sommets sont les éléments de M'. On dit que deux mots u et u' de M' sont compatibles si, chaque fois qu'un bit n'est effacé ni dans u ni dans u', alors il a la même valeur dans les deux. Dans notre graphe, on relie deux sommets lorsque les mots correspondants sont **in**compatibles.

   On appelle coloriage parfait d'un graphe une partition du graphe telle que les deux sommets d'une arête n'appartiennent jamais à la même partie.

4. Montrer qu'à toute hypothèse peut être associé, de manière surjective, un coloriage parfait.
5. Montrer que dans le cas où les sommets sont tous liés deux à deux, on peut trouver m simplement.
6. Proposer un algorithme pour notre problème, permettant de trouver des hypothèses et permettant de retrouver le message initial presque sûrement lorsque $r \to +\infty$.

(Je ne suis pas sûr de m'en rappeler tout à fait correctement, cet exercice n'est donc qu'une approximation de celui qui m'a été donné, il est peut-être faux ou trivial)

9 ENS - Maths Lyon

E désigne l'espace $C^0([0,\ 1],\ \mathbb{R})$ muni de $\|\ \|_\infty$ et K la partie de E formée des fonctions 1-lipschitziennes s'annulant en 0.

Soit $N(\delta)$ le nombre minimal de boules de rayon δ nécessaires pour recouvrir K.

Minorer et majorer $N(\delta)$ assez finement.

(**Indication, après quelques tentatives :** « Essayez de pousser plus loin l'idée d'utiliser des fonctions affines par morceaux »)

10 ENS - Maths Ulm

$$\alpha_n = \inf_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)\in(\pm 1)^n} \left(\sup_{\theta\in[0,2\pi]} \left| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k e^{ik\theta} \right| \right)$$

1. Montrer que $\forall n, \alpha_n \geqslant \sqrt{n}$.
2. Trouver un majorant de α_n (beaucoup plus fin que n...)

(**Indication pour le 2**, parachutée après une remarque de ma part du type « il faut prendre la suite des ε aussi irrégulière que possible »:

On pose $\begin{cases} P_0 = Q_0 = 1 \\ P_{n+1} = P_n + X^{2^n} Q_n \\ Q_{n+1} = P_n - X^{2^n} Q_n \end{cases}$, montrer que $\forall n$, $\deg P_n = \deg Q_n = 2^n - 1$ et qu'il existe une suite $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\{+1, -1\}$ telle que $\forall n$, $P_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} r_k X^k$. Que peut-on dire de la suite $w_n = |P_n(e^{i\theta})|^2 + |Q_n(e^{i\theta})|^2$ à θ fixé ?)

11 ENS - Info Ulm (incomplet)

Tous les graphes considérés seront non-orientés.

Soit $G = (V, E)$ un graphe. On appelle couplage de ce graphe un ensemble $M \subset E$ tel que les sommets des arêtes de M sont deux à deux distincts. Un sommet de V qui n'est extrémité d'aucune arête de M est dit exposé. Une partie A de V est dite saturée par M si aucun sommet de A n'est exposé. On dit qu'un couplage est parfait si V est saturé par M.

On appelle chemin alterné un chemin dans G dont chaque arête est alternativement dans M puis dans $E - M$. Un chemin alterné est dit améliorant s'il relie deux sommets exposés.

1. Montrer qu'il existe un chemin améliorant pour le couplage M si et seulement si ce couplage n'est pas de cardinal maximum.
2. Soit $G = (A \sqcup B, V)$ un graphe biparti. Montrer qu'il existe un couplage saturant A si et seulement si pour toute partie $X \subset A$, le voisinage $N(X)$ de X vérifie $|N(X)| \geqslant |X|$.
3. Montrer qu'un graphe biparti k-régulier (chaque sommet a pour degré k) possède un couplage parfait.

Le sujet continuait, mais je n'ai pas lu la suite, n'ayant fait que la question 1, le sens direct de la question 2 et ayant perdu beaucoup de temps sur la réciproque de la question 2. Il était question dans la suite de la notion de « couverture ».