Programme de maths de MP, repris point par point

1 Structures algébriques usuelles

1.1 Groupes et sous-groupes

Groupe : ensemble non vide muni d'une loi interne associative avec un élément neutre, et dont tout élément est inversible. On munit un produit fini de groupes d'une structure naturelle de groupe.

Un **sous-groupe** est une partie contenant 1 et stable par soustraction. Une intersection de sous-groupes est un sous-groupe.

Si P est une partie d'un groupe G, le **sous-groupe engendré** par P est noté $<P>$ et est formé de tous les éléments de la forme $p_1^{m_1}p_2^{m_2}p_3^{m_3}...p_r^{m_r}$ avec $\forall i, p_i \in P$ et $m_i \in \mathbb{Z}$.

Les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ sont les $n\mathbb{Z}$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

1.2 Morphismes de groupes

Morphisme de groupe φ entre $(G, +)$ et $(G', \times)$: $\forall x, y \in G, \varphi(x+y) = \varphi(x) \times \varphi(y)$.

L'image, l'image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme de groupes st un sous-groupe. On pose $\text{Im}(\varphi) = \varphi(G)$ et $\text{Ker}(\varphi) = \varphi^{-1}(1_{G'})$. φ est injectif si et seulement si $\text{Ker}(\varphi) = \{0_G\}$.

Un morphisme bijectif est un **isomorphisme**, et la bijection réciproque est alors elle aussi un isomorphisme.

1.3 Groupes monogènes et cycliques

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est l'ensemble des classes d'équivalence pour $. \equiv . [n]$ munie de l'addition naturelle. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est engendré par n'importe quel élément q tel que $q \wedge n = 1$.

Un **groupe monogène** ou cyclique est un groupe engendré par un seul de ses éléments. Tout groupe monogène est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$ s'il est infini et à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ s'il est fini de cardinal n.

1.4 Ordre d'un élément dans un groupe

Un élément a est d'**ordre fini** si le sous-groupe qu'il engendre est fini, et on note alors $o(a) = o(<a>) = \#<a>$. On a $a^n = 1_G$ si et seulement si $o(a)|n$.

Théorème de Lagrange : Si F est un sous-groupe de G d'ordre fini, alors $o(F)|o(G)$.

1.5 Anneaux

Anneau $(A, +, \times)$: $(A, +)$ un groupe abélien, $(A, \times)$ un monoïde, $\times$ distributive sur $+$. On munit un produit fini d'anneaux d'une structure naturelle d'anneau.

Un **sous-anneau** est une partie contenant 0 et 1, stable pour la soustraction et la multiplication.

Un **morphisme d'anneaux** φ entre $(A, +, \times)$ et $(A', +', \times')$ est tel que $\forall x, y \in A, \varphi(x+y) = \varphi(x) +' \varphi(y)$ et $\varphi(x \times y) = \varphi(x) \times' \varphi(y')$.

L'image, l'image réciproque d'un sous-anneau est un sous-anneau. $\text{Ker}(\varphi) = \varphi^{-1}(0_{A'})$ n'est en général pas un anneau.

Un **isomorphisme d'anneaux** est un morphisme bijectif, et sa bijection réciproque est alors un isomorphisme.

Un anneau est **intègre** s'il n'est pas réduit à $\{0\}$ et si $\forall x, y \in A, x \times y = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$. Un **corps** est un anneau commutatif pour lequel tout élément non nul admet un inverse multiplicatif. Un **sous-corps** est une partie contenant 0 et 1, stable pour la soustraction et la division par un élément non nul.

1.6 Idéaux d'un anneau commutatif

Idéal : sous-groupe additif absorbant (ie $\forall(x, y) \in A \times I, x \times y \in I$). Le noyau d'un morphisme d'anneaux est un idéal.

Dans un anneau commutatif intègre, on dit que a divise b si l'idéal engendré par a contient l'idéal engendré par b.

Les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont les $n\mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ est dit principal).

1.7 L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

C'est $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ muni de la multiplication naturelle (compatible avec les congruences). Les inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont les classes $\bar{p}$ telles que $p \wedge n = 1$. Ainsi, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps ssi n est premier.

Théorème des restes chinois : si $m \wedge n = 1$, alors $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est isomorphe) $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$, ce qui permet de résoudre des systèmes de congruences.

On note en général $\varphi(n) = o\,(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times} = \mathrm{Card}\{k \in [[1, n]] / k \wedge n = 1\} = n \times \prod_{p \in \mathbb{P}, p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$. Si $u \wedge v = 1$, alors $\varphi(uv) = \varphi(u)\varphi(v)$.

Théorème d'Euler : si $a \wedge n = 1$, alors $a^{\varphi(n)} \equiv 1\,[n]$ (généralise le théorème de Fermat).

1.8 Anneaux de polynômes à une indéterminée

Les idéaux de $K[X]$ sont les $P_0\,K[X]$ où $P_0 \in K[X]$.

Le PGCD de deux polynômes P et Q est l'unique P_0 unitaire tel que $P_0K[X] = PK[X] + QK[X]$, ce qu'on généralise à n polynômes.

Théorème de Bézout : $P \wedge Q = 1 \Leftrightarrow \exists U, V / UP + VQ = 1$; **Gauss :** $P \wedge Q = 1$ et $P|QR \Rightarrow P|R$.

Les irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif ; les irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

Il existe une unique décomposition d'un polynôme en facteurs irréductibles.

1.9 Algèbres

Une $\mathbb{K}-$algèbre est un anneau auquel on rajoute une loi externe $\cdot : \mathbb{K} \times A \rightarrow A$ vérifiant les axiomes d'espace vectoriel et compatible avec $\times$ de manière à ce que $\times$ soit bilinéaire.

Les sous-algèbres sont les parties contenant 0 et 1 et stables par combinaison linéaire et multiplication. Un morphisme d'algèbres est un morphisme d'anneau en même temps qu'une application linéaire.

2 Réduction des endormorphismes et des matrices carrées (en dimension n finie)

2.1 Généralités

Matrices semblables. Sous-espaces stables (dans une base adaptée : forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ avec A carrée) et endomorphismes induits (correspondant à ladite matrice A).

2.2 Eléments propres d'un endomorphisme/matrice

On dit que λ est une valeur propre (vp) de u si $\exists x \neq 0, u(x) = \lambda x$. x est alors un vecteur propre ($\vec{\mathrm{vp}}$) de u associé à λ. On pose $E_\lambda = \ker(u - \lambda \mathrm{Id})$ qu'on nomme sous-espace propre.

Le spectre $\mathrm{Sp}(u)$ d'un endomorphisme est l'ensemble de ses valeurs propres (il y en a au plus n).
Des sous-espaces propres associés à des vp distinctes sont en somme directe.
Si u et v commutent, tout sous-espace propre de u est stable par v.

Ces notions se généralisent bien à des matrices. Deux matrices semblables ont même spectre.

2.3 Polynôme caractéristique

Si u est un endomorphisme, on pose $\chi_u = \det(\lambda \mathrm{Id} - u)$, qui est de la forme $X^n - \mathrm{tr}(u) X^{n-1} \pm .... + (-1)^n \det(u)$ et dont les racines sont exactement les valeurs propres de u.

On appelle multiplicité m d'une valeur propre λ sa multiplicité comme racine de χ_u. On a alors $1 \leqslant \dim(E_n) \leqslant m$.

Le polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire est le produit des $X - m_i$ où les m_i sont les coefficients diagonaux, comptés autant de fois qu'ils apparaissent.

Si F est stable par u et u_F l'induit de u sur F alors $\chi_{u_F} | \chi_u$.

2.4 Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables.

Un endomorphisme u est diagonalisable s'il existe une base (de vecteurs propres) dans laquelle sa matrice est diagonale. Il faut et il suffit pour cela que $\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda = E$, c'est à dire $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim(E_\lambda) = n$.

Pour que u soit diagonalisable, il est nécessaire que χ_u soit scindé et suffisant que χ_u soit scindé à racines simples. Si $\mathrm{mult}(\lambda)$ désigne la multiplicité d'une vp λ (en tant que racine de χ_u), alors u est diagonalisable si et seulement si $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u), \mathrm{mult}(\lambda) = \dim(E_\lambda)$.

2.5 Endomorphismes et matrices carrées trigonalisables

Un endomorphisme u est trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire (supérieure). Il faut et il suffit pour cela que χ_u soit scindé. On a alors $\mathrm{tr}(u) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathrm{mult}(\lambda) \times \lambda$ et $\det(u) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda^{\mathrm{mult}(\lambda)}$.

2.6 Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes

Un endomorphisme est nilpotent si et seulement si son polynôme caractéristique est X^n, cela si et seulement si il est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0 (ie s'il existe une base dans laquelle la matrice est triangulaire supérieure *stricte*).

2.7 Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

Si $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X] = \sum_{i=1}^{d} a_i X^i$, on note $P(u) = \sum_{i=1}^{d} a_i u^i$. Le morphisme $P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P(u)$ a pour noyau l'idéal annulateur de u, de la forme $\mu_u \mathbb{K}[X]$ où μ_u est le polynôme minimal de u (choisi unitaire), et pour image l'algèbre $\mathbb{K}[u]$.
Si d est le degré de μ_u, la famille $(u^k)_{0 \leqslant k \leqslant d-1}$ forme une base de $\mathbb{K}[u]$.

Si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda) x$. Les racines de μ_u sont donc les valeurs propres de u.

Théorème de Cayley-Hamilton : $\mu_u | \chi_u$, c'est-à-dire que $\chi_u(u) = 0$.

(H-P : **Théorème de Hilbert-Dirac :** $\chi_u | \mu_u^n$)

2.8 Lemme de décomposition des noyaux

Si $P_1, P_2, ..., P_r$ sont des polynômes deux à deux premiers entre eux et tels que $P = P_1 P_2 \cdots P_r$, alors $\mathrm{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^r \mathrm{Ker}(P_i(u))$.

2.9 Polynômes annulateurs et diagonalisabilité

Un endomorphisme u est diagonalisable ssi il existe un polynôme scindé à racines simples l'annulant, cela ssi μ_u est scindé à racines simples.

(De même u trigonalisable ssi μ_u scindé)

Si F stable par u et u_F l'induit, alors $\mu_{u_F} | \mu_u$. En particulier, si u est diagonalisable, u_F l'est aussi.

2.10 Endomorphismes à polynôme minimal scindé

S'il existe un polynôme scindé annulant u, on peut décomposer E en somme directe de sous-espaces stables par u sur chacun desquels u induit la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent commutant entre eux (et s'exprimant polynomialement en u).

Ces sous-espaces sont les sous-espaces caractéristiques $E'_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda I)^m$ où m est la multiplicité de λ dans μ_u ou χ_u. Cela conduit aux décompositions (hors-programme) de Dunford et Jordan.

3 Fonctions convexes

3.1 Parties convexes d'un ev réel

Une partie P est convexe ssi $\forall x, y \in P, \forall t \in [0, 1]$, $(1 - t)x + ty \in P$, cela ssi les barycentres à coefficients positifs d'éléments de P sont tous dans P.

3.2 Fonctions convexes d'une variable réelle

Une fonction f est convexe sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ si pour tout $(x, y) \in I^2$ et tout $\lambda \in [0, 1]$, $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leqslant (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y)$. (Une telle fonction est alors continue sur l'intérieur de I).

On a alors $f(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) \leqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$ dès que $x_1, ..., x_n$ sont des points de I et $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ des réels positifs de somme 1 (inégalité de Jensen).

f est convexe ssi l'épigraphe (points au-dessus du graphe) est convexe. Toutes les cordes sont alors au-dessus du graphe.

Inégalité des pentes : si f convexe sur I et $a < b < c$ dans I, alors $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant \frac{f(c) - f(a)}{b - a} \leqslant \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$. Réciproquement, si cette inégalité vaut dès que $a < b < c$ dans I, alors f est convexe sur I.

Une fonction est concave si la fonction opposée est convexe, et on a alors des propriétés analogues mais avec les inégalités dans l'autre sens.

3.3 Fonctions convexes dérivables, deux fois dérivables

Si f est dérivable sur I, f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I.

Si f est deux fois dérivable sur I, f est convexe sur I si et seulement si f'' est positive sur I.

Une fonction convexe dérivable a son graphe toujours au-dessus de ses tangentes. Cela permet d'obtenir des inégalités de convexité comme $e^x \geqslant x + 1$ de manière automatique.

Exemple : si $a, b > 0$ et $p + q = 1$, alors $a^p b^q = \exp(p \ln(a) + q \ln(b)) \leqslant pa + qb$.

4 Topologie des espaces vectoriels normés

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les notions d'espace métrique (ou topologique), de suite de Cauchy, d'espace complet/de Banach, sont hors-programme.

4.1 Normes et espaces vectoriels normés

Une norme N sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une application positive vérifiant :

- $\forall x \in E, N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (axiome de séparation)
- $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (axiome d'homogénéité)
- $\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire, sous-additivité)

E muni de la norme N est alors désigné comme un espace vectoriel normé (evn).

On introduit alors une distance (positive, symétrique, séparée, vérifiant l'inégalité triangulaire) d par la formule $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = N(x - y)$. (toute distance ne correspond pas à une norme).

La boule fermée de centre x et de rayon a est $B(x, a) = \{y \in E / d(x, y) \leqslant a\}$, la boule ouverte est $B'(x, a) = \{y \in E / d(x, y) < a\}$ et la sphère est $S(x, a) = \{y \in E / d(x, y) = a\}$. Les boules (fermées ou ouvertes) sont convexes.

Une partie de E est bornée si elle est incluse dans une boule fermée. De même, une suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est bornée si $\{u_n / n \in \mathbb{N}\}$ est bornée et une fonction $f: B \mapsto E$ est bornée si $f(B)$ l'est.

Si, dans un espace préhilbertien réel, on a un produit scalaire $(.|.)$, on forme la norme $\forall x \in E$, $N(x) = \sqrt{(x|x)}$ et la distance $d(x, y) = N(x - y)$ (dites euclidiennes)

Sur $\mathbb{K}^n$, on a les normes : $||(x_i)||_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$, $||(x_i)||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$, $||(x_i)||_\infty = \max\{|x_i|\}$.

Si I est un ensemble quelconque, on définit sur l'espace $l^\infty(I, \mathbb{K})$ des fonctions bornées de I dans $\mathbb{K}$ la norme de la convergence uniforme $||.||_\infty$ telle que $||f||_\infty = \max_{x \in I} |f(x)|$.

Si I est un segment de $\mathbb{R}$, on définit sur l'espace $C_m^0(I, \mathbb{K})$ des fonctions continues par morceau de I dans $\mathbb{K}$ les normes : $||f||_1 = \int_I |f|$ (norme de la convergence en moyenne), $||f||_2 = \sqrt{\int_I |f|^2}$ (norme de la convergence en moyenne quadratique).

Si $(E_1, E_2, ..., E_n)$ sont n evn (munis des normes $N_1, N_2, ..., N_n$), alors on munit $\prod E_i$ au choix d'une des normes suivantes : $N(x_1, ...) = \sum N_i(x_i)$, $N(x_1, ...) = \sqrt{\sum |N_i(x_i)|^2}$ ou $N(x_1, ...) = \max(N_i(x_i))$.

4.2 Suites d'éléments d'un evn

Une suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ converge s'il existe $l \in E$ tel que $d(u_n, l) \to 0$, c'est-à-dire que $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_0, d(u_n, l) \leqslant \varepsilon$. La limite est alors unique et se note $\lim(u_n)$. On dit que la suite diverge si elle ne converge pas.

Toute suite convergente est bornée. Une somme, une combinaison linéaire de suites convergentes est convergente et la limite est la même combinaison des limites respectives.

Dans un produit fini d'evn, une suite $(u_{1n}, u_{2n}, ..., u_{kn}) \in (E_1 \times ... \times E_k)^{\mathbb{N}}$ converge (peu importe la norme) ssi les suites $(u_{1n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ etc... convergent dans leur espace respectif, et la limite est alors le k-uplet formé des limites respectives.

On appelle extraction une fonction $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante. Une suite (v_n) est dite extraite de (u_n) s'il existe une extraction φ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}$. Les valeurs d'adhérence de (u_n) sont les limites de suites extraites. Une suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence diverge.

4.3 Comparaison des normes

Si N_1 et N_2 sont deux normes sur l'evn E, on dit que N_1 est plus fine que N_2 si $\exists \alpha > 0, \forall x \in E$, $N_2(x) \leqslant \alpha N_1(x)$. On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes si elles sont mutuellement plus fines l'une et l'autre, c'est-à-dire si $\exists \alpha, \beta > 0, \forall x \in E, \alpha N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \beta N_1(x)$.

Pour deux normes équivalentes, les parties bornées, les suites convergentes sont les mêmes.

(On peut montrer que deux normes ne sont pas équivalentes en trouvant une suite convergeant pour l'une et non pour l'autre)

4.4 Topologie d'un evn

Un ouvert de E est une partie O telle que $\forall x \in O, \exists r > 0, B(x, r) \subset O$. Une réunion quelconque d'ouverts ou une intersection finie d'ouverts est un ouvert. Une boule ouverte est un ouvert.

Un voisinage V d'un point $x \in E$ est une partie de E contenant un ouvert contenant x.

Un fermé de E est une partie F dont le complémentaire $E - F$ est un ouvert. Alternativement, c'est une partie telle que si $(u_n) \in F^{\mathbb{N}}$ converge dans E, alors $\lim (u_n) \in F$. Les fermés sont stables par intersection quelconque et par union finie. Une boule fermée et une sphère sont fermées.

Un point x est dit intérieur à une partie P si P est un voisinage de x, c'est-à-dire qu'il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset P$.

Un point x est adhérent à une partie P si on peut approcher x par des éléments de $P - \{x\}$.

L'intérieur d'une partie P, noté $\dot{P}$, est le plus grand ouvert (pour l'inclusion) contenu dans P, c'est-à-dire l'ensemble des points de P intérieurs à P. L'adhérence de P, notée $\bar{P}$, est le plus petit fermé contenant P, c'est-à-dire l'ensemble des points de E adhérents à P. On a $\overline{E - P} = E - \dot{P}$. La frontière de P désigne $\bar{P} - \dot{P}$.

Une partie P est dense dans E si $\bar{P} = E$, c'est-à-dire qu'on peut approcher tout élément de E par des éléments de P aussi précisément qu'on veut.

Les fermés, les ouverts, etc. ne changent pas lorsqu'on passe d'une norme à une autre norme équivalente.

Si A est une partie de E, on dit que $P \subset A$ est un ouvert relatif de A s'il existe un ouvert V de E tel que $P = V \cap A$, c'est-à-dire que P est un ouvert pour la topologie induite sur A. De même, un fermé relatif est un fermé pour la topologie induite sur A. Un voisinage relatif de $x \in A$ est une partie de A contenant un ouvert relatif de A contenant x.

4.5 Etude locale d'une application, continuité

4.5.1 Limite d'une fonction

Si f est une application d'un evn A dans un evn B, on dit que f a pour limite $l \in B$ en $a \in A$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, f(B(a, \alpha)) \subset B(l, \varepsilon)$, c'est-à-dire que toute suite $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ de limite a vérifie $(f(u_n)) \to l$. Une CL de fonctions ayant une limite en a a une limite en a, correspondant à la même CL des limites respectives.

4.5.2 Continuité

f est continue en $a \in A$ si f a pour limite $f(a)$ en a. f est continue sur A si elle est continue en tout point $a \in A$, c'est-à-dire que : $\forall a \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A, d(x, a) \leqslant \alpha \Rightarrow d(f(x), f(a)) \leqslant \varepsilon$. Une combinaison linéaire d'applications continues est continue, une composition d'applications continues (lorsqu'on peut les composer) est continue.

Une fonction est continue si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de B est un ouvert de A, cela si et seulement si l'image réciproque de tout fermé de B est un fermé de A.

Si f est à valeurs dans un produit d'evn, la continuité de f équivaut à la continuité de toutes les « composantes » de f. De même pour la convergence (la limite étant alors le k-uplet formé des limites respectives) etc...

Il est clair que deux applications continues qui coïncident sur une partie dense sont égales.

4.5.3 Autres formes de continuité

f est uniformément continue sur A si $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall a \in A, f(B(a, \alpha)) \subset B(f(a), \varepsilon)$, c'est-à-dire qu'à ε fixé on peut choisir le même α pour tous les $a \in A$. Une application uniformément continue est en particulier continue.

f est k-lipschitzienne sur A si $\forall (x, y) \in A^2, d(f(x), f(y)) \leqslant k d(x, y)$. Une application lipschitzienne est uniformément continue.

4.5.4 Cas des applications linéaires

Si $u \in L(A, B)$ est linéaire, elle est continue sur A si et seulement si elle est continue en 0, cela si et seulement si $\exists C > 0, \forall x \in A, ||u(x)|| \leqslant C\|x\|$ (u est alors C-lipschitzienne). On note $L_c(A, B)$ l'ensemble des applications linéaires continues de A dans B.

Hors-programme : Le plus petit C correspondant est alors noté $|||u|||$ (norme subordonnée) et on vérifie que $|||.\ |||$ est une norme sur $L(A,\ B)$ qui est de plus sous-multiplicative lorsqu'on peut composer (c'est donc une norme d'algèbre si $A = B$). On a : $|||u||| = \inf \{C > 0 \,/\, \forall x \in A, ||u(x)|| \leqslant C||x||\} = \sup \left\{\frac{||u(x)||}{||x||} \,/\, x \neq 0\right\}$. Dans le cas d'une application diagonalisable (par exemple symétrique), lorsque la norme choisie est euclidienne, on a $|||u||| = \sup \{|\lambda| \,/\, \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\}$ et dans le cas général on a $|||u||| = \sqrt{\sup \{|\lambda| \,/\, \lambda \in \mathrm{Sp}(u^* u)\}}$.

4.6 Parties compactes d'un espace normé (au sens de Bolzano-Weierstrass)

Une partie P d'un evn (E, N) est compacte si de toute suite $(u_n) \in P^{\mathbb{N}}$ on peut extraire une sous-suite convergente (dans P). Tout compact est fermé et borné. Tout fermé inclus dans un compact est compact. Un produit fini de compacts est un compact pour la topologie produit.

Une suite d'éléments d'un compact converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

On mentionne la propriété (hors-programme) de Borel-Lebesgue : dans un espace métrique, un compact peut aussi être défini comme un espace P tel que de tout recouvrement $(O_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de P par des ouverts de P on peut extraire un recouvrement fini $(O_{\varphi(i)})_{i \in [[1, k]]}$ de P.

4.7 Applications continues sur une partie compacte

L'image directe d'une partie compacte par une application continue est un compact. Il existe toujours un point d'un compact P en lequel la borne est atteinte (car l'application $p \in P \mapsto \|p\|$ est continue, donc son image est compacte dans $\mathbb{R}$, elle est donc bornée et contient ses bornes). Cela éclaire le résultat classique du théorème des bornes atteintes.

4.8 Parties connexes par arcs d'un evn

Un arc entre deux points x et y d'un evn E est une application f continue d'un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ dans E telle que $f(a) = x$ et $f(b) = y$.

Si A est une partie de E, on peut définir la relation d'équivalence $x \equiv y$ si et seulement s'il existe un arc entre x et y dont l'image est incluse dans A. Les classes d'équivalence pour cette relation sont alors les composantes connexes par arcs de A.

On dit que A est connexe par arc si $\forall (x, y) \in A^2, x \equiv y$, c'est-à-dire qu'il existe toujours un chemin continu de x à y ne sortant pas de A.

Sont connexes en particulier : les parties convexes, les parties étoilées (c'est-à-dire telles qu'il existe $x_0 \in A$ tel que $\forall x \in A, [x, x_0] \subset A$).

Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles. L'image continue d'une partie connexe par arcs est connexe par arcs, ce qui éclaire le théorème des valeurs intermédiaires.

4.9 Espaces vectoriels normés de dimension finie

Dans la suite, E est un evn **de dimension finie**.

Théorème : dans un evn E de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes ; il n'y a donc pas lieu de préciser la norme lorsqu'on parle de fermés, d'ouverts, de convergence, etc.

La convergence d'une suite (d'une fonction etc.) dans E est toujours équivalente à la convergence de chacune des coordonnées dans une base. En particulier, E est fermé. Par ailleurs, toute application linéaire de E dans un evn F (de dimension *quelconque*) est continue.

E étant de dimension finie, les compacts de E sont **exactement** les fermés bornés[1].

Une suite bornée d'un evn de dimension finie converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence (en effet il suffit de regarder la topologie induite dans $\overline{\{u_n, n \in \mathbb{N}\}} = \{u_n / n \in \mathbb{N}\} \cup \{\lim (u_{\varphi(n)}) / \varphi \,\text{extr.}\}$ qui est un compact).

Les applications polynomiales en les coordonnées d'un vecteur dans une base (finie) sont continues (c'est le cas du déterminant), de même pour les applications multilinéaires définies sur un produit fini d'evn de dimensions finies.

5 Espaces préhilbertiens réels. Endomorphismes des espaces euclidiens

Dans la suite, E est un espace préhilbertien.

5.1 Projection orthogonale sur un sev de dimension finie

Si F est un sev de E de dimension finie, dont $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base orthonormée (obtenue par exemple par le procédé de Gram-Schmidt), alors on appelle projection orthogonale d'un vecteur $x \in E$ sur F le vecteur $p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)e_i$. C'est l'unique vecteur $y \in F$ tel que $(x - y) \in F^{\perp}$, et c'est aussi le vecteur de F minimisant la distance $\|x - y\|$.

On a **l'inégalité de Bessel :** $\|p_F(x)\| \leqslant \|x\|$. Plus généralement, si $(e_i)_{i \in I}$ est une famille orthonormale dénombrable quelconque, alors $\sum_{i \in I} (x|e_i)^2 \leqslant \|x\|^2$, et il y a égalité si et seulement si $x \in \overline{\mathrm{Vect}((e_i)_{i \in I})}$ (on a alors que la famille $\left(\|x - \sum_{i \in J} (x|e_i)e_i\|\right)_{J \subset I \text{ fini}}$ a pour borne inférieure 0).

5.2 Suites orthonormales de vecteurs d'un espace préhilbertien réel

S'il y a toujours égalité dans l'inégalité de Bessel, c'est-à-dire si $\mathrm{Vect}((e_i)_{i \in I})$ est dense dans E, on dit que $(e_i)_{i \in I}$ est une suite orthonormale totale de E ou une base de Hilbert.

1. Attention ! Dans un evn de dimension infinie, il y a **toujours** des contre-exemples : $B(0, 1)$ est fermé borné et non compact. (Riesz).

Si p. ex. $I=\mathbb{N}$, on peut alors écrire tout élément $x\in E$ comme limite de la suite $(\sum_{i=1}^{n}(x|e_i)e_i)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire la limite de $p_n(x)$ où p_n désigne le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_n)$.

5.3 Endomorphismes symétriques d'un espace euclidien

Un endomorphisme u d'un espace euclidien E est symétrique ou autoadjoint si $\forall(x,\ y)\in E^2$, $(x|u(y))=(u(x)|y)$, c'est-à-dire si sa matrice dans une base orthonormée est symétrique.

Les projecteurs orthogonaux (c'est-à-dire tels que $p\circ p=p$ et $\mathrm{Ker}(p)\perp\mathrm{Im}(p)$) sont exactement les projecteurs symétriques.

Si un espace F est stable par u autoadjoint, alors son orthogonal $F^\perp$ est stable par u.

Théorème spectral : si u est un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E, alors il existe une base orthonormale dans laquelle la matrice de u est diagonale. En conséquence, toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.

5.4 Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Une isométrie vectorielle d'un espace euclidien E est un endomorphisme u tel que $\forall x\in E, \|u(x)\|=\|x\|$. On montre aisément (avec les formules de polarisation par exemple) qu'alors que cela revient à dire que u est un automorphisme orthogonal, c'est-à-dire que $u^*u=\mathrm{Id}$.

De même, si un sev F est stable par une isométrie u, alors l'orthogonal $F^\perp$ est stable par u.

Si u est une isométrie vectorielle de E euclidien, il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u a la forme : $\begin{pmatrix} I_p & & & & & \\ & -I_q & & & & \\ & & R_{\theta_1} & & & \\ & & & R_{\theta_2} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & R_{\theta_r} \end{pmatrix}$ où $p+q+2r=n$ et $R_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$.

Dans le cas de la dimension 3, par exemple, les cas possibles sont :

$p=3$	$q=0$	$r=0$	$u=\mathrm{Id}$
$p=2$	$q=1$	$r=0$	u : sym $\perp$ % plan
$p=1$	$q=2$	$r=0$	u : sym $\perp$ % axe

$p=0$	$q=3$	$r=0$	$u=-\mathrm{Id}$
$p=1$	$q=0$	$r=1$	u : rot % axe
$p=0$	$q=1$	$r=1$	u : rot % axe + sym $\perp$ % plan

6 Séries et familles sommables

6.1 Séries numériques et vectorielles

6.1.1 Séries à valeurs dans un espace normé de dimension finie

Si (u_n) est une suite, on définit la suite (S_n) des sommes partielles $S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$. On dit que la série $\sum u_n$ converge si (S_n) converge et que $\sum u_n$ diverge sinon.

Si $\sum u_n$ converge, on appelle somme de la série la limite de (S_n), notée $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$. On appelle suite des restes la suite (R_n) de terme général $R_n=\sum_{k=n}^{+\infty}u_k$.

Sur l'espace vectoriel des séries convergentes, la somme est une application linéaire.

Si $u_n\nrightarrow 0$, on dit que $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

Une suite (u_n) converge si et seulement si la série $\sum u_{n+1}-u_n$ est convergente.

Une série est absolument convergente si $\sum |u_n|$ est une série convergente. Une série absolument convergente est toujours convergente dans un espace vectoriel normé ; en revanche, une série convergente peut ne pas être absolument convergente, auquel cas elle est dite semi-convergente.

6.1.2 Compléments sur les séries numériques

Règle de d'Alembert : si à partir d'un certain rang $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est défini et majoré par un $a<1$, alors $\sum u_n$ converge (cela vaut en particulier si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a une limite <1). Si au contraire à partir d'un certain rang $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est défini et minoré par un $a>1$, alors $\sum u_n$ diverge, de même si $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}>1$.

Critère des séries alternées : si d_n est une suite décroissante tendant vers 0, alors la série $\sum (-1)^n d_n$ est dite alternée, et est alors convergente. De plus, les restes sont de même signe que le premier terme omis et sont inférieurs en valeur absolu au premier terme omis.

La transformation d'Abel ou la sommation par tranches de séries semi-convergentes sont hors-programme.

Si f est une fonction continue par morceau et décroissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, alors la série de terme général $\int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t - f(n)$ converge, ce qui permet d'estimer des sommes partielles ou des restes.

Si (u_n) et (v_n) sont deux séries à termes positifs alors :

- Si $\sum v_n$ diverge et que $u_n=o(v_n)$, $u_n=O(v_n)$ ou $u_n\sim v_n$, alors on a les mêmes relations de comparaison entre les deux suites des **sommes partielles**.

- Si $\sum v_n$ converge et que $u_n=o(v_n)$, $u_n=O(v_n)$ ou $u_n\sim v_n$, alors on a les mêmes relations de comparaison entre les deux suites des **restes**.

6.2 Familles sommables de nombres complexes

6.2.1 Ensembles dénombrables

Un ensemble est dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. Les parties infinies de $\mathbb{N}$ sont dénombrables. Un ensemble est fini ou dénombrable s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.

Un produit fini d'ensembles dénombrables est dénombrable. Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable.

Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sont dénombrables. $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

6.2.2 Familles sommables

Une famille $(u_n)_{n\in I}$ de réels positifs, où I est dénombrable, est sommable si l'ensemble des sommes $\sum_{i\in F} u_i$ (où F est une partie finie de I) est majoré, et alors on pose $\sum_{i\in I} u_i = \sup\left\{\sum_{i\in F} u_i / F\subset I \text{ fini}\right\}$. On admet d'écrire $\sum_{i\in I} u_i=+\infty$ si l'ensemble n'est pas majoré.

Théorème de sommation par paquets : si $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de I et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs, alors la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si :

- Pour tout entier n la famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable (de somme v_n)

- La série $\sum v_n$ converge.

Et dans ce cas, $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$.

On étend la sommabilité aux nombres réels en considérant les parties positives et négatives, puis aux nombres complexes en considérant les parties réelles et imaginaires : une suite $(u_n)\in\mathbb{C}^I$ est sommable si et seulement si $\left(|u_n|\right)\in(\mathbb{R}^+)^I$ est sommable, et sa somme est alors obtenue en écrivant $\sum_{n\in I} u_n = \sum_{n\in I}\mathrm{Re}(u_n)^+ - \sum_{n\in I}\mathrm{Re}(u_n)^- + i\sum_{n\in I}\mathrm{Im}(u_n)^+ - i\sum_{n\in I}\mathrm{Im}(u_n)^-$ ou en considérant la limite des sommes partielles.
On remarque que la sommabilité est confondue avec la convergence absolue si $I=\mathbb{N}$.

Dans le cas d'une famille sommable, on peut permuter ou regrouper librement des termes sans altérer la somme. En outre, l'application somme est linéaire sur l'espace vectoriel des familles sommables, et on peut étendre le théorème de sommation par paquets (i.e. $\sum_{n\in I} u_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i\in I_n} u_i$ en vérifiant la **sommabilité** de $(u_i)_{i\in I_n}$ pour tout n et de la série complète).

6.2.3 Applications des familles sommables

La famille $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ de réels positifs est sommable si et seulement si pour tout n, la série $\sum a_{m,n}$ converge et que la série $\sum \left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}\right)$ converge. Si tel est le cas, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}\right)$$

c'est une forme du théorème de Fubini qui se déduit du théorème de sommation par paquets.

Si la famille $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ de nombres complexes est sommable (c'est-à-dire que $(|a_{m,n}|)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable, ce qu'on vérifie avec la cns précédente), on a la même égalité.

Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes : $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n\right) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} u_m v_n = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{m=0}^{k} u_m v_{k-m}$ (autre cas particulier de sommation par paquets).

7 Suites et séries de fonctions, séries entières

Les fonctions sont définies sur une partie A d'un evn E de dimension finie à valeurs dans un evn F de dimension finie.

7.1 Suites et séries de fonctions

7.1.1 Convergence simple, convergence uniforme

On dit qu'une suite de fonctions $(f_n) \in (F^A)^{\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction $f \in F^A$ si $\forall x \in A,\, f_n(x) \to f(x)$. La fonction limite est alors unique.

On dit que (f_n) tend uniformément vers f si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \forall x \in A, |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. Cela revient à dire que $\|f_n - f\|_\infty = \sup_A |f_n - f|$ tend vers 0, ou encore qu'il existe une suite $(u_n) \in \bar{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}$ de limite nulle telle que $\forall x \in A, |f_n(x) - f(x)| \leqslant u_n$. La convergence uniforme vers f implique la convergence simple vers f.

(On notera cvs la convergence simple, cvu la convergence uniforme, et cvus la convergence uniforme sur tout segment lorsque $A \subset \mathbb{R}$)

7.1.2 Continuité, double limite

Si (u_n) est une suite de fonctions continues en a convergeant uniformément vers u sur un voisinage de a, alors u est continue en a. En particulier, toute limite uniforme (ou unifome sur tout compact) de fonctions continues sur A est continue sur A.

Théorème de la double limite : Soit $u_n \xrightarrow{\text{cvu}} u$ et $a \in \bar{A}$. Si pour tout n, u_n admet une limite l_n en a, alors (l_n) converge et $\lim_{x\to a}(u(x)) = \lim_{n\to+\infty}(l_n)$. On généralise le résultat à $a = \pm\infty$.

7.1.3 Intégration d'une limite uniforme sur un segment

Soit $u_n \in C^0(I, F) \xrightarrow{\text{cvus}} u$ et $a \in I$. Alors $\left(U_n\colon x \mapsto \int_a^x u_n\right) \xrightarrow{\text{cvus}} \left(U\colon x \mapsto \int_a^x u\right)$.
(On peut intervertir primitive et cvus, et donc intervertir intégration et cvu sur un même segment)

7.1.4 Dérivation d'une suite de fonctions

Soit $u_n \in C^1(I, F) \xrightarrow{\text{cvs}} u$ telle que $u'_n \xrightarrow{\text{cvus}} v$. Alors $u_n \xrightarrow{\text{cvus}} u$, $u \in C^1(I, F)$ et $u' = v$.
On peut étendre ce résultat aux fonctions C^k en supposant la convergence simple des $\left(u_n^{(j)}\right)$ pour $j < k$ et la convergence uniforme de $\left(u_n^{(k)}\right)$.

7.1.5 Séries de fonctions

On dit que $\sum u_n \xrightarrow{\text{cvs}} S$ si la suite $\sum_{n=0}^N u_n \xrightarrow[N \to +\infty]{\text{cvs}} S$ et de même pour la cvu. On montre que $\sum u_n \xrightarrow{\text{cvu}} S$ ssi $\sum u_n \xrightarrow{\text{cvs}} S$ et $R_n \xrightarrow{\text{cvu}} 0$ (R_n étant la suite des restes). Les résultats sur les suites de fonctions s'étendent naturellement aux séries de fonctions (limites, intégration, dérivabilité).

On introduit aussi le concept de convergence normale (cvn) : $\sum u_n$ cvn si $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_\infty$ converge. La cvn implique la cvu et la convergence absolue en tout point.

7.1.6 Approximation uniforme

Toute fonction continue par morceaux sur un segment y est limite uniforme de fonctions en escalier.

Théorème de Weierstrass : toute fonction continue sur un segment y est limite uniforme de fonctions polynomiales.

7.2 Séries entières

7.2.1 Généralités

Une série entière est une fonction, définie sur un ensemble à déterminer, de la forme $x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$.

Lemme d'Abel : si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée alors $|z| < |z_0| => \sum a_n z^n$ acv.

Ce lemme justifie la définition du rayon de convergence d'une série entière comme le réel $R = \sup \{r \geqslant 0 \,/\, a_n r^n \text{ bornée}\}$. La série converge alors sur le disque ouvert $B(0,\ R)$, diverge (grossièrement) en dehors du disque fermé $B'(0, R)$ et a un comportement inconnu sur $S(0, R)$.

La convergence d'une série entière est normale sur tout disque fermé $B'(0, r)$ lorsque $r < R$.

Si $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$. Si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.

La « dérivée formelle » d'une série entière $\sum a_n z^n$, définie comme $\sum (n+1) a_{n+1} z^n$, a même rayon de convergence. Il en va de même de $\sum n a_n z^n$.

On peut utiliser la règle de D'Alembert: si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to L$ alors $R = \frac{1}{L}$.

Comme limite normale, la somme d'une série entière est continue sur le disque ouvert de convergence, et C^∞ sur $]-R, R[$. On a un théorème hors-programme, dû à Abel, qui dit que si $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (\pm R)^n$ converge, alors la fonction somme est continue en $\pm R$.

La somme de deux séries entières $\sum (a_n + b_n) z^n$ ainsi que leur produit $(\sum a_n z^n)(\sum b_n z^n)$, écrit comme produit de Cauchy $\sum_{n \in \mathbb{N}} (\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}) z^n$, sont des séries entières de rayon de convergence supérieur au plus petit des rayons de convergences respectifs.

7.2.2 Série entière d'une variable réelle

On peut primitiver et dériver une série entière terme à terme sur le domaine ouvert de convergence, cela autant de fois qu'on veut.

On peut exprimer les coefficients de $S(z) = \sum a_n z^n$ par la formule $a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$. On en déduit que si deux séries entières coïncident sur un voisinage de 0, alors leurs coefficients coïcident.

7.2.3 Fonctions développables en série entière, développements usuels

La fonction exp s'écrit comme une série entière de rayon de convergence infini : $\forall z \in \mathbb{C}, e^z = \sum \frac{z^n}{n!}$.

La fonction $z \mapsto \frac{1}{1-z}$ s'écrit sur $B(0,1)$ comme somme de la série entière $\sum z^n$.

On dit qu'une fonction f est développable en série entière sur $]-r,r[$ s'il existe $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in]-r,r[$, $\sum a_n x^n \to f(x)$. Si f est DSE, les coefficients s'expriment selon la formule $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Par intégration ou dérivation, on peut montrer que exp / ch / sh / cos / sin sont DSE(0, ∞), que Arctan est DSE(0,1), que $\ln(1+x)$ est DSE(0,1), que $(1+x)^\alpha$ est DSE(0,1) (DSE($0,+\infty$) si $\alpha \in \mathbb{N}$).

On peut utiliser le théorème de Cauchy-Lipschitz et une équation différentielle vérifiée par f pour trouver une relation de récurrence sur les coefficients de la série entière et donc pour obtenir un DSE de f. On peut de même trouver les solutions DSE d'une équation différentielle donnée.

8 Fonctions vectorielles, arcs paramétrés

Dans la suite, $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle et E un evn de dimension finie.

8.1 Dérivabilité en un point

Soit $f\colon I \to E$. On dit que f est dérivable en $t \in I$ si $\lim_{h\to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$ existe, et on la note alors $f'(t)$. Cela si et seulement si il existe un développement limité de la forme $f(t+h) = f(t) + hf'(t) + \vec{o}(h)$ où $\|\vec{o}(h)\| = o(h)$.

Cela revient à dire que chacune des coordonnées de f dans une base donnée de E est dérivable, et la dérivée est alors le vecteur formé des dérivées respectives.

On étend de meme les notions de dérivabilité à gauche et à droite, de classes C^k, $C^{+\infty}$ et D^k.

8.2 Opérations sur les fonctions dérivables

Une combinaison linéaire de fonctions dérivables (en un point, sur un intervalle) est dérivable.
Si L est linéaire et que f est dérivable, alors $L \circ f$ est dérivable de dérivée $L \circ f'$.
Si B est bilinéaire et que f, g sont dérivables, alors $B(f,g)$ est dérivable de dérivée $B(f',g) + B(f, g')$, ce qui se généralise aux formes n-linéaires (produit scalaire ou vectoriel, déterminant).

Si $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable et $f\colon \mathbb{R} \to E$ aussi, alors $(f \circ \varphi)$ est dérivable de dérivée $\varphi' \times (f' \circ \varphi)$.

Les fonctions de $C^k(\mathbb{R}, E)$ ont des propriétés analogues (stables par CL, par composition à gauche par une application linéaire, par composition à droite par une fonction $C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, ...).

8.3 Intégration sur un segment

On définit l'intégrale d'une fonction $f \in C^0_m(I, E)$ lorsque I est un segment comme le vecteur formé des intégrales des coordonnées. L'intégrale est alors linéaire, croissante, vérifie la relation de Chasles et l'inégalité triangulaire.

On a aussi la convergence des sommes de Riemann associées à une subdivision régulière :

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

8.4 Intégrale fonction de sa borne supérieure

Si f est continue et $a \in I$, alors $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est dérivable de dérivée f.

On a l'inégalité des accroissements finis pour une fonction $f \in C^1([a,b],E)$:

$$\|f(b)-f(a)\| \leqslant |b-a| \times \sup_{x\in[a,b]} \|f'(x)\|$$

8.5 Formules de Taylor

Si $f \in C^{n+1}([a,b],E)$, et si $R_n = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$, alors :

$$R_n = \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t \qquad \text{(Reste intégral de Laplace)}$$

$$\|R_n\| \leqslant \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t\in[a,b]} \|f^{(n+1)}(t)\| \qquad \text{(Inégalité de Taylor-Lagrange)}$$

$$\|R_n\| = o((b-a)^n) \qquad \text{(Formule de Taylor-Young)}$$

8.6 Arcs paramétrés

Un arc paramétré de classe C^1 à valeurs dans E est une fonction $f: I \xrightarrow{C^1} E$.

On dit qu'un paramètre t est régulier si $f'(t) \neq \vec{0}$, le point $f(t)$ est alors dit régulier. Un point non-régulier est dit stationnaire.

Dans le cas où $E = \mathbb{R}^2$ (arc paramétré plan), on peut définir en tout point régulier $f(t)$ la tangente à ce point : il s'agit de la droite passant par $f(t)$ et dirigée par $f'(t)$. On définit aussi la normale à l'arc en $f(t)$ régulier comme la droite perpendiculaire à la tangente en $f(t)$ passant par $f(t)$, c'est-à-dire dirigée par $(-f'_y(t), f'_x(t))$.

Pour étudier la courbe en des points stationnaires ou pour trouver ses asymptotes et branches infinies, il faut étudier ses limites ou faire des développements limités locaux (et, dans ce cas, aviser selon la parité des deux premiers termes d'ordre $\geqslant 1$ linéairement indépendants du DL).

Le tracé passe par la réduction du domaine d'étude, l'étude des variations, l'étude des asymptotes puis l'étude des points stationnaires. La recherche des points d'inflexion n'est pas une priorité.

9 Intégration sur un intervalle quelconque

9.1 Intégrale généralisée sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$

Si $f \in C_m^0([a,+\infty[,\mathbb{K})$, on dit que $\int_a^{+\infty} f$ est convergente si $x \mapsto \int_a^x f$ a une limite finie lorsque $x \to +\infty$, et on note alors $\int_a^{+\infty} f$ ou $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ la limite.

Les fonctions f telles que cette intégrale soit convergente forment un espace vectoriel, sur lequel l'application $f \mapsto \int_a^{+\infty} f$ est linéaire et croissante. Si f est positive, alors $\int_a^{+\infty} f$ est positive.

Si f est continue, l'application $x \mapsto \int_x^{+\infty} f$ est C^1 de fonction dérivée $-f$.

9.2 Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$

Une fonction f est dite intégrable sur $[a,+\infty[$ si $\int_a^{+\infty} |f|$ converge (on peut aussi dire que l'intégrale converge absolument). Si f est intégrable, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge.

9.3 Intégration des fonctions positives sur $[a,+\infty[$

Si f est positive sur $[a,+\infty[$, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f$ est majorée.

Sur $\left[1,+\infty\right[$, $x\mapsto\frac{1}{x^\alpha}$ est intégrable si et seulement si $\alpha>1$.

Si $0\leqslant f\leqslant g$ ou $f=_{+\infty}O(g)$, et si g est intégrable, alors f est intégrable.
Si $0\leqslant f, g$ et $f\sim_{+\infty}g$, alors f est intégrable si et seulement si g est intégrable.

9.4 Intégration sur un intervalle quelconque

Sur un intervalle semi-ouvert $[a,b[$, on peut étendre de même la notion d'intégrale et d'intégrabilité en considérant $\lim_{x\to b^-}\left(\int_a^x f\right)$. Sur $]a,b[$, on introduit $c\in]a,b[$ et on écrit $\int_{]a,b[}f=\int_{]a,c]}f+\int_{[c,b[}f$, l'intégrabilité étant équivalente à l'intégrabilité des deux intégrales apparaissant dans la somme, et le résultat ne dépendant pas du choix de c, ni de si la borne est incluse ou non.

L'intégrale ainsi définie vérifie toujours des propriétés de linéarité, positivité, croissance sur l'espace vectoriel des fonctions dont l'intégrale converge (ou converge absolument). On a aussi la relation de Chasles : $\int_{(a,b)}f=\int_{(a,c)}f+\int_{(c,b)}f$ quel que soit $c\in(a,b)$ et quels que soient les formes des intervalles ; ainsi que l'inégalité triangulaire $\int_I|f|\geqslant\left|\int_I f\right|$.

Si une fonction continue positive a une intégrale nulle sur un intervalle (de cardinal infini), alors elle y est identiquement nulle.

Si $b>0$, alors $x\mapsto\frac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $\left]0,b\right]$ si et seulement si $\alpha<1$.

Formule du changement de variable : si $f\in C^0(]a,b[,\mathbb{R})$ et $\varphi\in C^1(]\alpha,\beta[,]a,b[)$ est bijective et strictement croissante, alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$ sont de même nature et égales en cas de convergence.

Intégration par parties : Si $f,\ g\in C^1([a,\ b],\ \mathbb{R})$ et si deux des trois termes de cette égalité convergent, alors les trois convergent et on a $\int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t=[fg]_a^b-\int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t$ (ou le crochet désigne éventuellement une limite).

9.5 Intégration des relations de comparaison

Soit $g\geqslant 0$, alors, par exemple sur un intervalle $[a,b[$ où $b\leqslant+\infty$.

- Si $\int_a^b g$ diverge et que $f=o(g)$, $f=O(g)$ ou $f\sim g$ en b, alors on a les mêmes relations de comparaison entre les deux fonctions $x\mapsto\int_a^x f$ et $x\mapsto\int_a^x g$ en b.

- Si $\int_a^b$ converge et que $f=o(g)$, $f=O(g)$ ou $f\sim g$ en b, alors on a les mêmes relations de comparaison entre les deux fonctions $x\mapsto\int_x^b f$ et $x\mapsto\int_x^b g$ en b.

9.6 Passage à la limite sous l'intégrale

Théorème de convergence dominée : soit $f_n\in C_m^0(I,\mathbb{K})\xrightarrow{\text{cvs}}f\in C_m^0(I,\mathbb{K})$ telles qu'il existe $\varphi\in C_m^0(I,\mathbb{R}^+)$ intégrable pour laquelle on ait $\forall n, |f_n|\leqslant\varphi$. Alors $\int_I f_n\to\int_I f$.
On étend ce théorème au cas d'une famille à paramètre réel $(f_\lambda)_{\lambda\in J}$ où $J\subset\mathbb{R}$ est un intervalle.

Théorème d'intégration terme à terme : Si $f_n\in C_m^0(I)$ intégrables, si $\sum f_n\xrightarrow{\text{cvs}}f\in C_m^0(I)$ et si $\sum\int_I|f_n|$ converge, alors f est intégrable et $\int_I f=\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_I f_n$.

9.7 Continuité d'une intégrale à paramètre

Soit E un evn de dim finie, $A\subset E$, $I\subset\mathbb{R}$ un intervalle, $f\colon A\times I\to\mathbb{K}$ une fonction C^0 par rapport à la première variable $x\in A$ et C_m^0 par rapport à la seconde $t\in I$. S'il existe $\varphi\colon I\mapsto\mathbb{R}^+$ intégrable telle que $\forall(x,t)\in A\times I, \left|f(x,t)\right|\leqslant\varphi(t)$, alors $g\colon x\mapsto\int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.

Si A est un intervalle de $\mathbb{R}$, il suffit de supposer f dominée ($\exists\varphi_s, ...$) sur tout segment $s \subset A$.

9.8 Dérivation d'une intégrale à paramètre

Soit I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f\colon J \times I \to \mathbb{K}$ une fonction telle que $\forall x \in J, f(x, \bullet)$ soit C_m^0 intégrable sur I et que $\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}$ soit définie sur $J \times I$ et vérifie les hypothèses du théorème précédent. Alors g: $x \mapsto \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est de classe C^1 et vérifie $g'(x) = \int_I \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\mathrm{d}t$.

Pour montrer qu'une intégrale à paramètre est de classe C^k, il suffit d'avoir les hypothèses faibles (C_m^0 intégrable sur I) pour les $\frac{\partial^j f(x,\bullet)}{\partial x^j}$ lorsque $j < k$ et les hypothèses fortes (celles du théorème de continuité, i.e. C^0 par rapport à x, C_m^0 par rapport à t, dominée sur tout segment de J) sur $\frac{\partial^k f(x,\bullet)}{\partial x^k}$.

10 Variables aléatoires discrètes

10.1 Espaces probabilisés

Si Ω est un ensemble, on dit que $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω si c'est un ensemble de parties de Ω (nommées événements) non vide, stable par union ou intersection dénombrable et par passage au complémentaire. Ω muni de la tribu $\mathcal{A}$ est un espace probabilisable noté $(\Omega, \mathcal{A})$.

On appelle probabilité une application de $\mathcal{A}$ dans $[0,1]$ telle que $P(\Omega) = 1$ et que si $(E_1, E_2, ...) \in \mathcal{A}^I$ sont des événements deux à deux disjoints alors $P\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) = \sum_{i\in I} P(E_i)$. On appelle alors espace probabilisé le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Dans le cas où Ω est fini ou dénombrable et que $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, on peut se contenter de décrire les probabilités des singletons ω_i de $\mathcal{P}(\Omega)$ en s'assurant que $\sum_{w\in\Omega} P(\omega) = 1$.

10.2 Propriétés élémentaires des probabilités

Continuité croissante : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements croissante pour l'inclusion, alors $P(A_n) \to P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$.

Continuité décroissante : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements décroissante pour l'inclusion, alors $P(A_n) \to P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$.

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements quelconque, alors : $P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$.

Un événement de probabilité nulle est dit négligeable, son complémentaire est dit presque sur. Une réunion finie ou dénombrable d'événements négligeables est négligeable.

10.3 Probabilités conditionnelles et indépendance

Si A et B sont deux événements, B n'étant pas négligeable, on pose $P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

Formule des probabilités composées : Si $A_1 \cap ... \cap A_n$ n'est pas négligeable alors $P(A_1 \cap ... \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1\cap A_2)\cdots P(A_n|A_1\cap A_2\cap ... \cap A_{n-1})$.

Formule des probabilités totales : Si $(E_i)_{i\in I}$ forme un système complet d'événements non négligeables, on a $\forall A \in \mathcal{A}, P(A) = \sum_{i\in I} P(E_i)P(A|E_i)$.

Formule de Bayes : si $(A_i)_{i\in I}$ forme un système complet d'événements non négligeables et que B n'est pas négligeable, alors : $\forall i \in I, P(A_i|B) = \frac{P(A_i\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j\in I} P(A_j)P(B|A_j)}$.

Deux événements A et B sont indépendants si $P(A\cap B) = P(A)P(B)$. Des événements $(A_i)_{i\in I}$ sont dits mutuellement indépendants si pour toute partie finie $J \subset I$, on a $P\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J} P(A_i)$.

10.4 Variables aléatoires discrètes

On appelle variable aléatoire discrète sur Ω une application $X:\Omega\to E$ telle que $X(\Omega)$ soit au plus dénombrable et que pout tout $x\in X(\Omega), X^{-1}(\{x\})\in\mathcal{A}$ (si $E\subset\mathbb{R}$, la variable est dite réelle).

La loi de la variable aléatoire X est l'application $P_X\colon X(\Omega)\to[0,1]$ telle que $\forall x\in X(\Omega), P_X(x)=P(X^{-1}\{x\})$.

10.5 Couples de variables aléatoires, variables aléatoires indépendantes

La loi conjointe d'un couple (X,Y) de variables aléatoires est la donnée de $P(X=x,Y=y)$ pour tout $(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$. Les lois marginales sont simplement les lois de chaque loi. On ne peut pas en général retrouver la loi conjointe en fonction des lois marginales, l'inverse étant aisé.

La loi conditionnelle de Y sachant $X=x$ est la donnée de $P(Y=y|X=x)$ pour chaque $y\in Y(\Omega)$.

On étend simplement ces concepts aux n-uplets de variables aléatoires.

Des variables aléatoires sont dites indépendantes si $\forall(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$,$P(X=x,Y=y)=P(X=x)P(Y=y)$. Plus généralement, une famille $(X_i)_{i\in I}$ de v.a. est dite mutuellement indépendante si pour tout $J\subset I$ fini, et pour tout $(x_i)_{i\in J}\in\prod_{i\in J}X_i(\Omega)$ on a $P(\forall i\in J, X_i=x_i)=\prod_{i\in J}P(X_i=x_i)$.

Lemme des coalitions : si X_1, X_2, ..., X_n sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors pour tout $m\in[[1,n-1]]$ et toutes fonctions f, g, les variables $f(X_1, ..., X_m)$ et $g(X_{m+1}, ..., X_n)$ sont indépedantes.

Si on a une suite de variables indépendantes de lois discrètes données, on admet l'existence d'espaces probabilisés les portant. Cela permet par exemple de modéliser une suite infinie d'épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes (construction due à Carathéodory).

10.6 Lois usuelles

Si $p\in]0,1[$, la loi géométrique de paramètre p, notée $\mathcal{G}(p)$, est telle que si $X\sim\mathcal{G}(p)$ alors $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $P(X=k)=(1-p)^{k-1}p$. C'est la probabilité d'arrêt à la k-ième étape d'une suite d'épreuves de Bernoulli de paramètre p. C'est en outre une loi sans mémoire : $P(X>n+k|X>n)=P(X>k)$.

Pour $\lambda\in\mathbb{R}^{+*}$, la loi de Poisson de paramètre λ, notée $\mathcal{P}(\lambda)$ est telle que si $X\sim\mathcal{P}(\lambda)$ alors $\forall k\in\mathbb{N}$, $P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.

On peut approximer la loi binomiale par la loi de Poisson : si $np_n\to\lambda$ et si pour tout n, $X_n\sim\mathcal{B}(n,p_n)$ alors : $\forall k\in\mathbb{N}, P(X_n=k)\xrightarrow[n\to+\infty]{}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.

10.7 Espérance

Si X est une variable aléatoire réelle positive, l'espérance de X est la somme, éventuellement infinie, de la famille $(xP(X=x))_{x\in X(\Omega)}$, qu'on note $E(X)$.

Dans le cas général, on dit que X admet une espérance si la famille $(xP(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable (c'est-à-dire que $E(|X|)<+\infty$) et alors $E(X)=\sum_{x\in X(\Omega)}xP(X=x)$.

Une variable aléatoire est dite centrée si elle admet une espérance nulle.

L'espérance d'une variable suivant une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ est $\frac{1}{p}$, l'espérance d'une variable suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ est λ.

L'espérance est linéaire, positive, croissante sur l'espace vectoriel des variables aléatoires d'espérance finie (l^1). Si $|X|\leqslant Y$ et que $E(Y)<\infty$ alors X admet une espérance finie.

Formule de transfert : si X est une variable aléatoire discrète et que f est une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors $f(X)$ admet une espérance si et seulement si $(f(x)P(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable et alors : $E(f(X))=\sum_{x\in X(\Omega)}f(x)\,P(X=x)$.

Inégalité de MARKOV : si X est une v.a. positive, alors $\forall k \geqslant 0, P(X \geqslant k) \leqslant \frac{E(X)}{k}$.

Si X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes** d'espérance finie, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.

10.8 Variance, écart type et covariance

Si X est une variable aléatoire, le moment d'ordre k de X est, s'il existe, $E(X^k)$.

Si une v.a. admet un moment d'ordre 2, alors elle a une espérance finie (car $|X| \leqslant \frac{X^2+1}{2}$).

Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ : si X et Y admettent chacune un moment d'ordre 2, alors XY est d'espérance finie $E(XY) \leqslant \sqrt{E(X^2)E(Y^2)}$.

Les variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2 forment un espace vectoriel noté l^2.

On appelle variance de $X \in l^2$ le nombre $V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2$, et écart-type de X le nombre $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$. On a $V(aX + b) = a^2 V(x)$. On dit qu'une variable aléatoire est réduite si elle est de variance 1. Si X est une variable quelconque, on obtient une variable centrée réduite en considérant $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$.

La variance d'une variable suivant une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ est $\frac{1-p}{p^2}$, la variance d'une variable suivant une loi de POISSON $\mathcal{P}(\lambda)$ est λ.

Inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV : si $X \in l^2$, $\forall a \in \mathbb{R}, P(|X - E(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{V(x)}{a^2}$.

Si X et Y sont deux variables aléatoires de l^2, on introduit leur covariance $\mathrm{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y)$. En particulier, $\mathrm{Cov}(X, X) = V(X)$ et si X et Y sont indépendantes alors $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$. La covariance est une forme bilinéaire symétrique positive.

La variance d'une somme finie de variables aléatoires est inférieure à la somme des variances, et il suffit pour qu'il y ait égalité que les variables aléatoires soient deux à deux indépendantes.

10.9 Loi faible des grands nombres

Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoire deux à deux indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2, alors, en posant $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $m = E(X_1)$, on a :

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ce qui résulte de $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{V(X_1)}{n\varepsilon^2}$.

10.10 Fonctions génératrices

Si X est une v.a.d à valeurs dans $\mathbb{N}$, on défini sa fonction génératrice : $G_X(t) = E(t^X) = \sum_{k\in\mathbb{N}} P(X = k)t^k$. Le rayon de convergence de cette série entière et supérieur ou égal à 1 et il y a donc convergence normale sur le disque fermé de centre 0 et de rayon 1, ce qui montre que G_X est continue et C^∞ sur le disque ouvert de convergence.

On peut retrouver la loi de X en écrivant $P(X = k) = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$, l'espérance de X en écrivant $E(X) = G'_X(1)$ et la variance de X en écrivant $E(X(X-1)) = G''_X(1)$, ce qui montre $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1)(1 - G'_X(1))$.

(X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1, est de carré sommable si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1.)

La fonction génératrice d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ est le produit des fonctions génératrices respectives.

11 Equations différentielles linéaires

Dans la suite, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et E un espace vectoriel normé de dimension finie.

11.1 Généralités

Une équation différentielle linéaire (E) se met sous la forme $x' = a(t)(x) + b(t)$ où $a \in C^0(I, L(E))$ et $b \in C^0(I, E)$. On peut aussi l'écrire sous la forme matricielle $X' = A(t)X + B(t)$. On associe alors à cette équation l'équation homogène (E_0): $x' = a(t)(x)$. Les solutions de (E_0) forment un espace vectoriel S_0, et les solutions de (E) forment un espace affine S obtenu en ajoutant à S_0 une solution particulière quelconque de (E).

On appelle problème de CAUCHY la donnée d'une équation différentielle linéaire sous la forme $x' = a(t)(x) + b(t)$ et d'une condition de la forme $x(t_0) = x_0$ où $t_0 \in I$ et $x_0 \in E$.

Une équation scalaire linéaire d'ordre n peut se mettre sous la forme d'un système différentielle linéaire de la forme précédente avec n inconnues. Par exemple, $x^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)x^{(i)} + b(t)$ se met sous la forme $\begin{pmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-2)} \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & \cdots & a_{n-2}(t) & a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-2)} \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$, un problème de CAUCHY consistant alors en la donnée supplémentaire des valeurs de $x(t_0)$, $x'(t_0)$, $\cdots$, $x^{(n-1)}(t_0)$ pour un même point $t_0 \in I$.

Un problème de CAUCHY $\begin{cases} x' = a(t)(x) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ se met sous la forme intégrale suivante : $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [a(u)(x(u)) + b(u)]\mathrm{d}u$.

11.2 Solutions d'une équation différentielle linéaire

Théorème de CAUCHY linéaire : étant donné un problème de CAUCHY (pour l'une des définitions ci-dessus), il existe une et une seule solution à ce problème sur un intervalle donné, qui se prolonge de manière unique sur I. En particulier, deux solutions d'une même équation différentielle linéaire du premier ordre coïncidant en un point se prolongent nécessairement en une même solution maximale (et coïncident donc sur leur domaine de définition commun).

Dans le cas d'une équation homogène et pour $t_0 \in I$ donné, l'application Φ: $f \in S_0 \mapsto f(t_0) \in E$ est alors un isomorphisme, ce qui montre que S_0 est un espace de dimension $\dim(E)$. S est donc un espace affine de dimension $\dim(E)$.

Les équations scalaires d'ordre n, vu la remarque précédente, ont un espace des solutions (affine en général, vectoriel si équation homogène) de dimension n, et pour tout $t_0 \in I$ et pour tout n-uplet $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \in E^n$ il existe une et une seule solution vérifiant $\forall i \in [[0, n-1]], x^{(i)}(t_0) = x_i$.

Si l'équation différentielle n'est pas sous forme résolue, i.e. de la forme $a_n(x)y^{(n)} + \ldots + a_0(x)y = b(t)$, alors il faut résoudre l'EDL sur chaque intervalle où a_n ne s'annule pas puis tenter de recoller les solutions de manière à ce que la solution soit de classe C^n sur I entier.

Il est généralement intéressant de rechercher des solutions sous forme de série entière.

11.3 Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice

On définit l'exponentielle d'un endomorphisme $u \in L(E)$ comme l'endomorphisme $\exp(u) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{u^n}{n!}$ (la série étant bien absolument convergente, par exemple pour la norme d'algèbre $|||\cdot|||$). Dans le cas d'une matrice M, on pose également $\exp(M) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{M^n}{n!}$. L'application exponentielle est continue (et même infiniment différentiable).

Si X et Y sont deux matrices/endomorphismes qui commutent, on a $\exp(X + Y) = e^X e^Y$.

Si $a \in L(E)$, $f : t \mapsto \exp(ta)$ alors $f \in C^\infty$ et $f'(t) = a \circ \exp(ta) = \exp(ta) \circ a$.

Pour calculer une exponentielle, il peut être utile de diagonaliser ou d'utiliser la décomposition de Dunford.

11.4 Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

Soit le problème de Cauchy $x' = a(x)$ et $x(t_0) = x_0$, a étant un endomorphisme constant. Alors $x = \exp((t - t_0)a)(x_0)$.

11.5 Méthode de variation des constantes

Soit (E) l'équation $X' = A(t)X + B$ et (E_0) l'équation homogène associée. Les solutions de (E_0) forment un espace vectoriel dont on choisit une base $(e_1, ..., e_n)$. On recherche alors les solutions de (E) sous la forme $\sum \alpha_i(t)e_i(t)$ avec $\alpha_i : I \xrightarrow{C^1} \mathbb{K}$.

Cela mène à $\sum \alpha_i'(t)e_i(t) + \sum \alpha_i(t)e_i'(t) = A(t)\sum \alpha_i(t)e_i'(t) + B(t)$ soit $\sum \alpha_i'(t)e_i(t) = B(t)$. Pour tout t, la famille $(e_1(t), ..., e_n(t))$ forme une base donc en écrivant $(e_1^*(t), ..., e_n^*(t))$ la base duale on a $\alpha_i'(t) = e_i^*(t)(B(t))$ ce qui ramène le problème à n calculs de primitives.

Dans le cas où les coefficients sont constants, soit $X' = AX + B$, on peut choisir une base $(x_1, ..., x_n)$ de E et prendre $e_i = \exp((t - t_0)A)(x_i)$ pour un $t_0 \in I$ donné.

11.6 Equations différentielles scalaires du second ordre

Si on a l'équation scalaire du second ordre $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$, on peut appliquer la méthode précédente une fois qu'on a une base (e_1, e_2) de l'espace des solutions de $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$. On cherche alors les solutions sous la forme $\begin{cases} y = \alpha_1(t)e_1(t) + \alpha_2(t)e_2(t) \\ y' = \alpha_1(t)e_1'(t) + \alpha_2(t)e_2'(t) \end{cases}$ avec $\alpha_1, \alpha_2 \in C^1(I, \mathbb{K})$. Cela donne les deux équations $\begin{cases} \alpha_1'(t)e_1(t) + \alpha_2'(t)e_2(t) = 0 \\ \alpha_1'(t)e_1'(t) + \alpha_2'(t)e_2'(t) = c(t) \end{cases}$ qu'on peut résoudre pour obtenir $\alpha_1'(t)$ et $\alpha_2'(t)$ puis conclure par intégration.

Un autre cas fréquent est celui où l'on connaît une solution particulière y_0 de (E_0) et qu'on en cherche une seconde linéairement indépendante. On la cherche alors sous la forme $y = zy_0$ avec $z \in C^2(I, \mathbb{R})$ et on aboutit alors à l'équation $z''y_0(t) + (a(t) + 2z'y_0'(t))z' = 0$, du premier degré en z', qu'on peut résoudre aisément puis trouver z par intégration puis enfin trouver $y = zy_0$.

Si (f_1, f_2) sont deux solutions d'une équation scalaire homogène d'ordre 2 de la forme $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$, on définit leur Wronskien $W(t) = \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) \end{vmatrix}$ qui vérifie l'équation différentielle $W'(t) = \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ -a(t)f_1'(t) & -a(t)f_2'(t) \end{vmatrix} = -a(t)W(t)$. Si A est une primitive de a, on a alors $W(t) = W(t_0)\exp(A(t_0) - A(t))$. Si a est nul, $W(t)$ est même constant. Le fait que W soit soit toujours nul soit jamais nul montre qu'il y a équivalence entre : (f_1, f_2) est une base de S_0, il existe t_0 tel que $(f_1(t_0), f_2(t_0))$ soit une base de E et pour tout t, $(f_1(t), f_2(t))$ est une base de E.

12 Calcul différentiel

Dans la suite, E et F sont des evn de dimensions finies, Ω un ouvert de E.

12.1 Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles

On appelle dérivée de l'application f au point a selon le vecteur v, dans le cas où la limite existe, le scalaire $\mathrm{d}f_a(v) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + hv) - f(a)}{h}$.

Si on donne une base $(e_1, ..., e_n)$ de E, on pose $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \partial_i f(a) = \mathrm{d}f_a(e_i)$.

12.2 Différentielle

On dit que $f\colon E \to F$ est différentiable au point a s'il existe une application linéaire $\mathrm{d}f_a$, qui est alors unique et nommée différentielle, pour laquelle $f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f_a(h) + \vec{o}(h)$, où $\vec{o}(h)$ désigne une application vectorielle telle que $\|\vec{o}(h)\| \underset{\|h\| \to 0}{=\!=} o(\|h\|)$. Dans ce cas, f est continue en a et dérivable en a selon tout vecteur.

L'application f est dite différentiable sur Ω si elle est différentiable en tout point de Ω, et on a alors l'application différentielle $\mathrm{d}f\colon a \mapsto \mathrm{d}f_a$. Si cette dernière est continue, on dit que $f \in C^1(\Omega, F)$.

Dans le cas d'une application f affine, $\mathrm{d}f_a$ est simplement la partie linéaire de f. Si f est constante, sa différentielle est donc identiquement nulle ; et si f est linéaire, sa différentielle est elle-même.

Si l'application f est différentiable en a et que (e_i) est une base de E, alors $\mathrm{d}f_a(h) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \times h_i$.

Si on a deux bases (e_i) et (f_i) de E et F, on appelle jacobienne en a la matrice $J_a = M_{e,f}(\mathrm{d}f_a)$.

Dans le cas d'une fonction d'une variable réelle, la différentiabilité équivaut à la dérivabilité et alors $\mathrm{d}f_a(h) = h f'(a)$

12.3 Opérations sur les applications différentiables

Une combinaison linéaire d'application différentiables est différentiable et sa différentielle est la même combinaison linéaire des différentielles respectives.

Si f, g sont différentiables et B bilinéaire, alors $b = B(f,\ g)$ est différentiable de différentielle $\mathrm{d}b_a(h) = B(\mathrm{d}f_a(h), g(a)) + B(f(a), \mathrm{d}g_a(h))$.

Si f est différentiable en a et g différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et $d(g \circ f)_a = \mathrm{d}g_{f(a)} \circ \mathrm{d}f_a$. On peut aussi dire $J(g \circ f)_a = \mathrm{J}g_{f(a)} \mathrm{J}f_a$. En termes de dérivées partielles, on a donc : $\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a)) \times \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)$.

Si $\gamma\colon I \subset \mathbb{R} \to E$ est dérivable en t et que f est différentiable en $\gamma(t)$, alors $(f \circ \gamma)'(t) = \mathrm{d}f_{\gamma(t)}(\gamma'(t))$. Dans le cas particulier $\gamma\colon t \mapsto x + t h$, on a alors $(f \circ \gamma)'(t) = \mathrm{d}f_{x+th}(h)$.

$g\colon t \mapsto f(x_1(t), ..., x_n(t))$ se dérive selon la formule $g'(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_i}(x_1(a), ..., x_n(a)) \times x_i'(a)$.

12.4 Cas des applications numériques

Si E est euclidien, on définit le gradient en a d'une application f à valeurs réelles, différentiable en a comme le vecteur ∇f_a vérifiant $\mathrm{d}f_a = (\nabla f_a | \bullet)$. Dans une BON $(e_1, ..., e_n)$, il s'exprime $g = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} e_i$. Si $\nabla f_a \neq 0$, alors $v = \frac{\nabla f_a}{\|\nabla f_a\|}$ est le vecteur unitaire pour lequel $\mathrm{d}f_a(v)$ est maximal.

Un point critique d'une application différentiable numérique est un point en lequel son gradient est nul, c'est-à-dire que sa différentielle est nul. En un extremum local, il y a nécessairement un point critique mais la réciproque est fausse.

Pour rechercher des extrema globaux sur des compacts d'applications différentiables sur leur intérieur, il est intéressant de noter que d'une part le maximum existe et est atteint, et que d'autre part il est soit sur la frontière soit dans l'intérieur, et alors situé en un des points critiques.

12.5 Vecteurs tangents à une partie d'un evn de dimension finie

Si X est une partie de E et x un point de X, un vecteur v de E est tangent à X en x s'il existe $\varepsilon > 0$ et un arc γ défini sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ à valeurs dans X tel que $\gamma(t) \underset{0}{=} x + vt + o(t)$. L'ensemble des vecteurs tangents forme un cône.

Si f est une fonction à valeurs réelles définie et différentiable sur un ouvert de l'espace euclidien E et si X est une ligne de niveau de f alors les vecteurs tangents à X au point x de X sont orthogonaux au gradient de f en x.

12.6 Applications de classe C^1

Une application f est dite de classe C^1 sur un ouvert Ω si elle est différentiable sur Ω et si df est continue sur Ω. L'application f est de classe C^1 sur Ω si et seulement si les dérivées partielles relativement à une base de E existent en tout point de Ω et sont continues sur Ω.

On peut faire des combinaisons linéaires, compositions, composition à gauche par des applications n-linéaires de fonctions C^1 et on obtient alors des fonctions C^1.

Si $f \in C^1(\Omega, F)$ et $\gamma \in C^1\Big([0,1], \Omega\Big)$, si $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$, alors $f(b) - f(a) = \int_0^1 \mathrm{df}(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t$.

Si Ω est connexe par arcs, une fonction f est constante sur Ω si et seulement si elle est différentiable de différentielle nulle partout.

12.7 Applications de classe C^k

Les dérivées partielles k-ièmes $\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_k} \ldots \partial x_{j_1}}$ sont, si elles existent, les dérivées partielles des applications dérivées partielles. Par exemple, si $g\colon x, y \mapsto \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}(x,y)$ alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial g(x,y)}{\partial x}(x,y)$.

L'application f est dite de classe C^k sur un ouvert Ω si ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues sur Ω.

Théorème de Schwarz : Dans le cas où la fonction est de classe C^k, alors pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_k$, on a : $\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_k} \ldots \partial x_{j_1}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_{\sigma(k)}} \ldots \partial x_{j_{\sigma(1)}}}$. Par exemple, si $f \in C^2$, alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

On peut faire des combinaisons linéaires, des compositions, etc. de fonctions C^k et on obtient alors des fonctions C^k.

Remarque : formule de Taylor-Young à l'ordre 2 :

Si $f \in C^2(\Omega)$ et $a \in \Omega$ alors $f(a+h) \underset{h \to 0}{=\!=} f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \times h_i \times h_j + \vec{o}(h^2)$.

On notera que $B\colon h, h' \mapsto \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \times h_i \times h'_j$ est une forme bilinéaire symétrique, dont la matrice se nomme hessienne de f en a, et qu'alors $f(a+h) = f(a) + (\nabla f_a | h) + B(h,h) + \vec{o}(h^2)$.